集積の経済と都市の成長

── 公共投資と土地の有効利用 ──

奈　良　　　卓

目　　次

Ⅰ　序　　論

近年における少子•高齢化の一層の進行と，また地域間格差の拡大といった経済社会情勢の変化は，とりわけ地方都市における土地利用のあり方にも影響を及ぼしている。この背景として，一部地域で人口減少が本格化するとともに，地域を支える産業の低迷等によって，土地需要が低下している点を挙げることができる。とりわけ，大規模商業施設の郊外立地や公共施設の郊外移転等によって，中心市街地に空き店舗や空き地を発生させるとともに，従来の人口集住地域においては，人口の高齢化と減少とによって，空き家・空地化が進行している。しかも，そのような未利用建物や空き地がただちに新たな経済活動，たとえば産業用地あるいは住宅地として利用されることはなく，低・未利用地として残存し，しかもそれらが増大して，地方都市のさらなる空洞化に結びついている（佐々木・張［2005］)。以上の問題を踏まえ，我が国の土地利用に関する今後の課題は，適正な土地利用計画のもと，いかに低・未利用地を解消し，土地の有効利用を促進していくかである（『平成 19 年版土地白書』)。

このような地方都市において，土地の有効利用を促進する重要な方策は，(i) 集積の効果と成長を通じて都市全体の生産性を高め，都市内にある土地が生産的な用途に利用転換されたならば得られる収益を高めること，(ii) 土地利用転換を効率的に行うメカニズムを確立すること，の 2 つのチャネルを通じて利用転換のインセンティブを与えることである。

奈良［2007］では，上記に掲げた土地利用転換のインセンティブを与えるための 2 つのチャネルのうち，(i) に焦点を当てた分析が行われた。具体的には，住宅資本を含む資本蓄積に起因する集積の経済または集積効果の存在を考慮した動学一般均衡モデルを構築し，その中で，集積効果がいかにして都市における生産性の向上と成長をもたらすか，また，かかる生産性の向上と成長が土地の有効利用度を高めるかを検討し，一定の成果を得た。すなわち，資本蓄積が集積の経済として作用する枠組みにおいて，経済は初期時点から，実物資本，住宅資本，消費水準及び地価がいずれも市場利子率に等しい値で成長するような定常的成長均衡経路に乗り，

八戸大学ビジネス学部

製造業部門における資本のシェアの拡大は，都市における成長率を高めるとともに，土地の有効利用度も高めることがわかった。しかるに，奈良［2007］では，定常的成長均衡への移行過程が存在しない点，及び成長率が時間を通じて一定であり，しかも成長率が生産要素のシェア等外生的なパラメータのみによって規定されるがゆえに，政策変更を含む諸要因の変化あるいは資源配分の変化が経済成長あるいは土地の有効利用度に及ぼす影響を分析し得ない，という点で興味深さと分析の発展性に欠けるのみならず，現実の経済のあり方を十分把握するに至っていないと言わざるを得ない。また，奈良［2007］では，土地利用転換のインセンティブを与えるための 2 つ目のチャネルすなわち，土地利用転換を効率的に行うメカニズムをいかに確立するかに関して分析が行われていない。

そこで，本論では，この 2 つ目のチャネルに焦点を当て，分析することとする。ところで，本論で想定する土地利用転換を効率的に行うメカニズムを確立するとは，具体的に，土地利用転換を効率的に行うための社会的資本を整備することである。たとえば，土地を利用転換するに際して種々の建設・土木工事が必要になるがそのための物資の速やかな運搬，工作車両の速やかな移動には道路整備が必要不可欠である。しかるに，バブル崩壊後我が国経済は長期間低迷し，その間税収が落ち込み，国においても，地方においても厳しい財政事情に直面していることもあり，道路等社会資本を整備するための公共投資に予算及び資源を投入することが難しい状況になっている。しかるに，我が国における社会資本整備の状況を概観するに，大都市であるか地方都市であるかを問わず，改善の余地があると言える。たとえば，道路に関して言えば，都市の中心部から郊外に向かう放射道路は整備されても環状道路の整備が十分とは言えず，したがって都市内の円滑な交通が妨げられており，土地の利用転換をはじめとする諸活動の遂行を非効率化し，土地の有効利用促進を阻害し，ひいては経済厚生を低下させている怖れもある。かかる現状を考慮すると，財政事情に関わらず，環状道路を整備するような公共投資等公的支出を的確に行うことは集積効果を通じて都市の成長と経済厚生を高めるのに必要不可欠であると言える。

公的支出が成長を促進させるメカニズムを分析した先行研究として，Barro［1990］及び Barro＝Sala-i-Martin［1992］，さらには Futag-ami＝Morita＝Shibata［1993］及び近藤［2003］を挙げることができる。このうち，Barro 及び Barro＝Sala-i-Martin，また，近藤においては，フローとしての公共サービスのもたらす外部効果が，成長を持続させる要因として定式化されている。とりわけ，近藤では，一括税を投じて公共インフラを整備することによる輸送効率の向上が地域の経済成長に及ぼす影響が分析されている。

しかるに，(i) 平成 17 暦年における公的支出に占める公的資本形成の割合が約 21％と無視できないほど大きな値であること（『国民経済計算年報平成 19 年版』），(ii) 近藤が想定するような輸送効率を向上させるに際しては，フローとしての公共サービスより，ストックとしての輸送インフラの整備が大きな役割を果たすと思われること等により，本論では Futagami＝Morita＝Shibata 同様，社会資本の蓄積に結びつくような公的支出を想定する。具体的には，ストックとしての社会資本のもたらす外部効果が，生産活動としての土地利用転換を効率化し，土地の有効利用度を向上させ，ひいては経済成長を促進させるメカニズムを定式化する。

本論文における次章以下の構成は以下のとおりである。はじめに II で，基本的なフレームワークを示す。次の III では，定常的成長均衡の存在と一意性及びその動学的な性質を論じる。さらに IV では，税率の上昇とそれによる社会資本の整備が土地の有効利用を促進するか，また経済成長率を高めるかを分析する。最後の V

では，今後の課題と結論を述べる。

II　基本的モデル

閉鎖的な単一の都市において，各経済主体，すなわち企業及び家計の各時点における行動決定と市場での取引から，土地利用転換を効率的に行うための公共投資の財源とすべく，政府が家計に対して所得税を課すことを考慮した短期均衡式導出までのプロセスを説明することとする。そして経済主体の行動を，Mino and Shibata［1995］及び Futagami and Shibata［2000］同様，Weil［1989］によって提示された連続型重複世代モデルの枠組みで論じる。

1.　人口に関する仮定

s 期生まれの世代の人口を

(2-1)　$dN(s)=ne^{ns}$

とおく。このとき，t 期における総人口 $N(t)$ は，初期値を $N(0)=1$ として，

$$N(t)=\int_{-\infty}^{t} dN(s)ds=n\int_{-\infty}^{t} e^{ns}ds$$
$$=n\left[\frac{1}{n}e^{ns}\right]_{-\infty}^{t}=e^{nt}$$

と計算される。すなわち，

(2-2)　$N(t)=e^{nt}.$

また，これより，

(2-3)　$\dot{N}(t)/N(t)=n$

が得られるから，この経済における人口増加率は一定率 n である。また，以後一貫して労働人口は総人口に等しいことを仮定する。

2.　企業の行動

完全競争の仮定のもと，両地域とも生産活動を行う部門として，製造業部門及び土地利用転換サービス部門を想定する。尚，詳細は各箇所で説明することとする。

(1)　製造業部門

はじめに，製造業部門は実物資本，土地及び労働を用いて最終消費財としての製造業製品（manufactured good）及び資本の生産を行う。ただし，製造業部門が生産する資本は，知識資本を包含する実物資本のみである。いま，第 t 期における代表的企業の生産物をと $\hat{y}_m(t)$ し，また，実物資本，製造業部門の生産活動に使用される土地（以下，産業用地と表示する）及び製造業部門に投入される労働力をそれぞれ $\hat{k}_m(t)$，$\hat{l}_m(t)$，$\hat{n}_m(t)$ として，次のようなCobb-Douglas 型の生産関数を想定する。

(2-4)　$\hat{y}_m(t)=F(\hat{k}_m(t),\, \hat{l}_m(t),\, \hat{n}_m(t))=$
$A\hat{k}_m(t)^x\hat{l}_m(t)^z\hat{n}_m(t)^\omega K_m(t)^\lambda N(t)^\varepsilon,$
$0<x<1,\, 0<z<1,\, 0<\omega<1,$
$x+z+\omega=1,\, \lambda>0,\, \varepsilon<0.$

上記(2-4)における $K_m(t)^\lambda$ は，経済全体に存在する公共資本が生産活動にもたらす正の外部効果（集積の経済）であり[1)]，$N(t)^\varepsilon$ は，都市人口の増大が生産活動にもたらす負の外部効果（集積の不経済）であるものとする。ここに，両地域とも企業規模は等しく，企業数は $\delta\geqq 1$ であるものとする。また，$K_m(t)$，$L_m(t)$，$N_m(t)$ を，それぞれ実物資本の総量，製造業部門の生産活動に使用される土地（産業用地）の総量及び労働力の総量であるものとすると，以下（2-5a）～(2-5c）が成立する。

(2-5a)　$K_m(t)=\delta\hat{k}_m(t),$
(2-5b)　$L_m(t)=\delta\hat{l}_m(t),$
(2-5c)　$N_m(t)=\delta\hat{n}_m(t).$

ここに，企業数は人口に等しい，すなわち，$\delta=N(t)$ を仮定し，$\lambda=1-x$ 及び $\varepsilon=-\omega$ とおくと，生産関数（2-4）は，以下（2-4′）のように書き換えられる[2)]。

(2-4′)　$Y_m(t)=AL_m(t)^z n_m(t)^\omega K_m(t).$

ただし，$Y_m(t)$ は地域 i における製造業部門の生産水準の（経済全体における）総量であり，$n_m(t)\equiv N_m(t)/N(t)$ は，総人口 $N(t)$ に占める製造業部門に雇用される労働力の水準 $N_m(t)$ の割合である。

次に，製造業製品及び実物資本の価格を1とする（numeraire）。また，資本レンタル率，地代，製造業部門における名目労働賃金率を，それぞれ $r_m(t)$, $\pi_m(t)$, $w_m(t)$ とおくと，製造業部門の利潤最大化行動により，以下(2-6)～(2-8)が導かれる。

(2-6)　$r_m(t)=xAL_m(t)^z n_m(t)^\omega$,

(2-7)　$\pi_m(t)=zAL_m(t)^{z-1}n_m(t)^\omega K_m(t)$,

(2-8)　$w_m(t)=\omega AL_m(t)^z n_m(t)^{\omega-1}\cdot K_m(t)N(t)^{-1}$.

(2)　土地利用転換サービス部門

土地の用途選択はその時点の土地所有者によって行われるため，生産的土地（産業用地及び住宅地）については毎期売却の際に更地へ利用転換することとなる。そこで，土地の利用転換に専業する部門，すなわち，土地利用転換サービス部門の存在を仮定する。土地利用転換は，一定量の労働力を投入して行われる。第 t 期に地域 i おいて提供される土地利用転換サービスの総量を $Y_b(t)$，投入される労働力及びその労働力全体に占める割合を，それぞれ $N_b(t)$ 及び $n_b(t)$ として，また，土地利用転換サービスを生産するに際して無償で利用可能なストックとしての社会資本を $G(t)$ として次に示すような簡単な生産関数を仮定する。

(2-9)　$$Y_b(t)=BN_b(t)\left(\frac{G(t)}{N(t)}\right)=Bn_b(t)G(t), B>0.$$

上記は，土地利用転換サービスの1単位の生産に必要な労働力は，$N(t)/BG(t)$ であることを意味する。すなわち，Futagami＝Morita＝Shibata らが想定しているように，ストックとしての社会資本は，混雑によって生産活動におけるサービス水準が低下するが，ここでは製造業部門同様人口増加による混雑を想定する。いま，効率単位で測った1単位の産業用地の利用転換に，1単位のサービスを投入するものとする。また，土地利用転換サービスについては，それぞれの地域で自給自足すること仮定すると，$L_m^*(t)\equiv K_m(t)L_m(t)$ を効率単位で測った製造業部門の生産活動に投入される土地の水準として，土地利用転換サービスの需給均衡式は，以下（2-10）で与えられる。

(2-10)　$L_m^*(t)=Bn_b(t)G(t)$.

この（2-10）は，$g(t)\equiv G(t)/K_m(t)$ として，以下（2-10′）のように書き換えることができる。

(2-10′)　$L_m(t)=Bn_b(t)g(t)$

いま，土地利用転換サービス1単位の価格を $p_b(t)$，土地利用転換部門における名目賃金を $w_b(t)$，同部門の第 t 期における利潤は，労働力 $N_b(t)$ の関数として，

$$\Pi_b(N_b(t))=p_b(t)BN_b(t)\left(\frac{G(t)}{N(t)}\right)-w_b(t)N_b(t)$$

と表わされる。したがって，サービス生産量が正になるような完全競争均衡は，

(2-11)　$w_b(t)N(t)=Bp_b(t)G(t)$

で与えられる。

3.　家計の行動

(1)　家計の効用関数と最適化問題

いま，s 期生まれの代表的家計の t 期における製造業製品の消費水準を $c_m(s,t)$ とおく。このとき，同世代が任意の t 時点に直面する効用関数 $U(c_m(s,t))$ は，割引率 $\rho\geqq 0$ のもと，

(2-12)　$$U(c_m(s,t))=\int_t^\infty \log c_m(s,\nu)e^{-\rho(\nu-t)}d\nu$$

と表わされる。ただし，$\rho<n$ を仮定する。

次に，s 期世代の家計の t 期における労働所得及び非人的資産（non-human wealth）をそれぞれ $w(s,t)$ 及び $a(s,t)$ とおくと，家計の直面する予算制約式は，所得税率 θ のもと以下（2-13）で表わされる。

(2-13)　$$\frac{da(s,t)}{dt}=(1-\theta)[r(t)a(s,t)+w(s,t)]-c_m(s,t).$$

ゆえに，家計が直面する最適化問題は，改めて

以下（P）のように記すことができる。

$$\text{(P)}\quad \max_{c,a}\int_t^{\infty}\log c_m(s,\nu)e^{-\rho(\nu-t)}d\nu,\ s.t.\frac{da(s,t)}{dt}=(1-\theta)[r(t)a(s,t)+w(s,t)]-c_m(s,t).$$

上記最適化問題 (P) に対応する当該期価値ハミルトン関数を，以下のように構築する。

$$\tilde{H}(a(s,t),c_m(s,t),q(t))=\log c_m(s,t)+q(t)\{(1-\theta)[r(t)a(s,t)+w(s,t)]-c_m(s,t)\}.$$

ただし，$q(t)$ は当該期価値ハミルトン関数の随伴変数である。

最適化の必要条件は以下（2-14），（2-15）及び（2-16）で与えられる。

$$\text{(2-14)}\quad \frac{1}{c_m(s,t)}=q(t),$$

$$\text{(2-15)}\quad \dot{q}(t)=[\rho-(1-\theta)r(t)]q(t),$$

$$\text{(2-16)}\quad \lim_{\nu\to\infty}a(s,\nu)\exp\left(-(1-\theta)\int_t^{\nu}r(\mu)d\mu\right)=0.$$

上記のうち，(2-16) は N.P.G. 条件であるが，これは，以下で表わされる横断条件（2-17）と同値である[3)]。

$$\text{(2-17)}\quad \lim_{\nu\to\infty}q(\nu)e^{-\rho\nu}a(s,\nu)=0.$$

また，(2-14) 及び (2-15) より，以下のオイラー方程式（2-18）を得る。

$$\text{(2-18)}\quad \frac{dc_m(s,t)}{dt}=[(1-\theta)r(t)-\rho]c_m(s,t).$$

定義 2-1　都市における s 期世代の家計の t 期における人的資産 (human wealth) を $h(s,t)$ とおくと，次の（2-19）のように生涯にわたって得る労働賃金の割引現在価値の合計として定義することができる。

$$\text{(2-19)}\quad h(s,t)=\int_t^{\infty}(1-\theta)w(s,\nu)\cdot\exp\left(-(1-\theta)\int_t^{\nu}r(\mu)d\mu\right)d\nu.$$

この定義 2-1 に関し，以下の定理 2-1 を得る。

定理 2-1　t 期における消費の割引現在価値の合計は，非人的資産及び人的資産の和に等しくなる。すなわち，以下（2-20）が成立する。

$$\text{(2-20)}\quad \int_t^{\infty}c_m(s,\nu)\exp\left(-(1-\theta)\int_t^{\nu}r(\mu)d\mu\right)d\nu=a(s,t)+h(s,t).$$

(証明)　(2-13) を (2-19) に適用することにより，

$$\begin{aligned}h(s,t)&=\int_t^{\infty}\left\{\frac{da(s,\nu)}{d\nu}-(1-\theta)r(\nu)a(s,\nu)+c_m(s,\nu)\right\}\exp\left(-(1-\theta)\int_t^{\nu}r(\mu)d\mu\right)d\nu\\&=\int_t^{\infty}\frac{da(s,\nu)}{d\nu}\exp\left(-(1-\theta)\int_t^{\nu}r(\mu)d\mu\right)d\nu\\&\quad-(1-\theta)\int_t^{\infty}r(\nu)a(s,\nu)\cdot\exp\left(-(1-\theta)\int_t^{\nu}r(\mu)d\mu\right)d\nu\\&\quad+\int_t^{\infty}c_m(s,\nu)\exp\left(-(1-\theta)\int_t^{\nu}r(\mu)d\mu\right)d\nu\end{aligned}$$

と計算することができる。いま，$\int r(\mu)d\mu=R(\mu)$ とおくと，

$$\text{(2-21)}\quad \exp\left(-(1-\theta)\int_t^{\nu}r(\mu)d\mu\right)=e^{(1-\theta)R(t)-(1-\theta)R(\nu)}$$

と表わすことができるから，以下（2-19′）が得られる。

(2-19′)　$h(s,t)$

$$=e^{(1-\theta)R(t)}\left[\int_t^\infty \frac{da(s,\nu)}{d\nu}e^{-(1-\theta)R(\nu)}d\nu -(1-\theta)\int_t^\infty r(\nu)a(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}d\nu +\int_t^\infty c_m(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}d\nu\right]$$

ここで，部分積分の公式により，

$$\int_t^\infty \frac{d[a(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}]}{d\nu}d\nu =\int_t^\infty \frac{da(s,\nu)}{d\nu}e^{-(1-\theta)R(\nu)}d\nu -(1-\theta)\int_t^\infty r(\nu)a(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}d\nu$$

が成り立つが，N.P.G. 条件（2-16）を考慮することにより，

$$\int_t^\infty \frac{d[a(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}]}{d\nu}d\nu=[a(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}]_t^\infty =-a(s,t)e^{-(1-\theta)R(t)}$$

であるから，これを（2-19′）に適用するとただちに（2-20）を得る。　**（証明了）**

補題 2-2　s 期世代の家計の t 期における製造業製品の消費水準 $c_m(s,\nu)$ に関して，次の（2-22）が成立する。

(2-22)　$$\lim_{\nu\to\infty}c_m(s,\nu)\exp\left(-\int_t^\nu(1-\theta)r(\mu)d\mu\right)=0.$$

（証明） 最適化の必要条件（2-18）より，

$$c_m(s,\nu)=c_m(s,s)e^{-(1-\theta)R(s)+\rho s}\cdot e^{(1-\theta)R(\nu)-\rho\nu}\cdot \left(=c_m(s,s)\exp\left\{\int_s^\nu[(1-\theta)r(\mu)-\rho]d\mu\right\}\right)$$

が得られる。これにより，以下が導出される。

$$\lim_{\nu\to\infty}c_m(s,\nu)\exp\left(-\int_t^\nu(1-\theta)r(\mu)d\mu\right) =e^{(1-\theta)R(t)}\lim_{\nu\to\infty}c_m(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)} =e^{(1-\theta)R(t)}\cdot e^{-(1-\theta)R(s)+\rho s}\cdot c_m(s,s)\lim_{\nu\to\infty}e^{-\rho\nu}=0.$$

（証明了）

定理 2-3　s 期世代の家計の t 期における製造業製品の消費水準 $c_m(s,t)$，非人的資産 $a(s,t)$ 及び人的資産 $h(s,t)$ との間に以下（2-23）が成立する。

(2-23)　$c_m(s,t)=\rho[a(s,t)+h(s,t)]$

（証明）　はじめに，（2-20）に（2-21）を適用することにより，

(2-20′)　$$e^{(1-\theta)R(t)}\int_t^\infty c_m(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}d\nu =a(s,t)+h(s,t)$$

が得られる。ところで，

$$\frac{d[c_m(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}]}{d\nu} =e^{-(1-\theta)R(\nu)}\frac{dc_m(s,\nu)}{d\nu} -(1-\theta)r(\nu)c_m(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}$$

が得られるが，右辺第1項にオイラー方程式（2-18）を適用することにより，

$$\frac{d[c_m(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}]}{d\nu}=-\rho c_m(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}$$

となる。この両辺を積分すると，

$$[c_m(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}]_t^\infty =-\rho\int_t^\infty c_m(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}d\nu$$

が得られるが，（2-22）を考慮すると，左辺は $-c_m(s,t)e^{-(1-\theta)R(t)}$ に等しくなるから，

$$\int_t^\infty c_m(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}d\nu=\frac{1}{\rho}c_m(s,t)e^{-(1-\theta)R(t)}$$

が導出される。これを（2-20′）に適用して，（2-23）を得る。　**（証明了）**

(4)　集計

はじめに，既に定義した代表的家計の非人的資産 $a(s,t)$，人的資産 $h(s,t)$ 及び製造業製品の消費水準 $c_m(s,t)$ を，t 期において現存している世代全体で集計する。集計された変数とそれに相当する個別の変数との関係は以下のとおりである。

(2-24a)　$A(t)=\int_{-\infty}^{t} a(s,t)ne^{ns}ds,$

(2-24b)　$H(t)=\int_{-\infty}^{t} h(s,t)ne^{ns}ds,$

(2-24c)　$C_m(t)=\int_{-\infty}^{t} c_m(s,t)ne^{ns}ds.$

ところで，(2-23) を各時点の総人口で集計し，(2-24a)～(2-24c) を適用すると，以下 (2-23′) が得られる。

(2-23′)　$C_m(t)=\rho[A(t)+H(t)].$

次に，(2-21)［定義 2-1］を (2-24b) に適用すると，

$$H(t)=\int_{-\infty}^{t} h(s,\nu)ne^{ns}ds$$
$$=\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty}(1-\theta)w(s,\nu)\cdot \exp\left(-(1-\theta)\int_{t}^{\nu}r(\mu)d\mu\right)d\nu ne^{ns}ds$$

が得られるが，積分の順序を変えることにより，

$$H(t)=\int_{t}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{t}(1-\theta)w(s,\nu)ne^{ns}ds\right\}\cdot \exp\left(-\int_{t}^{\nu}(1-\theta)r(\mu)d\mu\right)d\nu$$

が得られる。上記中括弧は，時点 ν に生存している主体が稼ぐ税引き後の労働所得である。

いま，t 期に共存する全ての世代に労働所得を等しく分配すると，つまり，$w(s,\nu)=w(\nu)$ とすると，t 期の総人口が $N(t)=\int_{-\infty}^{t} ne^{ns}ds$ で表わされることを考慮しつつ，以下を得る。

(2-25)　$H(t)=N(t)\int_{t}^{\infty}(1-\theta)w(\nu)\cdot \exp\left(-(1-\theta)\int_{t}^{\nu}r(\mu)d\mu\right)d\nu$

(5)　動学体系の構築に向けて

はじめに，(2-21) を考慮しつつ，(2-25) を時間 t で微分すると，以下を得る。

(2-26)　$\dot{H}(t)=[(1-\theta)r(t)+n]\cdot H(t)-(1-\theta)N(t)w(t).$

次に，Leibnitz's Rule[4] を適用しつつ集計された非人的資産 $A(t)$ に関する (2-24a) を時間 t で微分することにより，以下 (2-27) が成立する。

(2-27)　$\dot{A}(t)=a(t,t)ne^{nt}+\int_{-\infty}^{t}\frac{da(s,t)}{dt}ne^{ns}ds.$

ここで，世代間の利他的な動機に基づく遺贈が存在しない重複世代モデルの枠組みのもとでは $a(t,t)=0$ であること，また，(2-1) 及び (2-15) を考慮しつつ，(2-27)，(2-24a) 及び (2-24c) より，

(2-28)　$\dot{A}(t)=(1-\theta)r(t)A(t)+(1-\theta)N(t)w(t)-C_m(t)$

が導かれる。さらに，(2-23′) の両辺を時間 t で微分し，(2-26) 及び (2-28) を適用することにより，以下 (2-29) が得られる[5]。

(2-29)　$\dot{C}_m(t)=[(1-\theta)r(t)+n-\rho]C_m(t)-\rho nA(t).$

4.　市場均衡

(1)　労働市場

いま，労働人口が総人口に等しい $N(t)$ であり，しかもこのモデルにおける産業は，製造業

部門及び土地利用転換部門の2部門のみであるから，以下の労働市場における需給均衡式（2-30）が成立する。

(2-30)　$N_m(t)+N_b(t)=N(t)$.

この(2-30)の両辺を $N(t)$ で除すると，以下(2-30′）が得られる。

(2-30′)　$n_m(t)+n_b(t)=1$.

次に地域内の労働市場における裁定条件は，これら2部門における貨幣賃金率が等しくなること($w(t)=w_m(t)=w_b(t)$)であるから，以下(2-31）が成立する。

(2-31)　$$w(t) =\omega AL_m(t)^z n_m(t)^{\omega-1}K_m(t)N(t)^{-1} =Bp_b(t)G(t)N(t)^{-1}.$$

(2)　土地市場

いま，$L_v(t)$ を t 期における遊休地として，以下の土地市場における需給均衡式を得る。

(2-32)　$L_m(t)+L_v(t)=L$

(3)　資産市場

はじめに，家計が保有する資産は実物資本，土地（産業用地及び遊休地）であるから，以下の資産市場の需給均衡式（2-33）が成立する。

(2-33)　$A(t)=K_m(t)+q_L(t)L$.

ただし，$q_L(t)$ は t 期におけるその用途に関わらずすべての土地に共通の取引価格であるが，この点，野口[1985]及び奈良[1997]，同[2000]，[2001a]，[2001b]，及び同［2003］で設けた仮定と同様である。

いま，実物資本は製造業部門において生産され，その価格は1に基準化されているから，完全予見の仮定のもと，資産を実物資本として運用した場合と預金等で運用した場合の裁定条件(no-arbitrage condition）は，それぞれの収益率が等しくなること，すなわち，$r(t)=r_m(t)$ であるから，(2-6）により，以下（2-34）で表わされる。

(2-34)　$r(t)=xAL_m(t)^z n_m(t)^{\omega}$.

また，資産を預金等で運用した場合と遊休地として運用した場合の裁定条件は，以下(2-35)で表わされる。

(2-35)　$r(t)=\dfrac{\dot{q}_L(t)}{q_L(t)}$.

また，資産を様々な用途の土地で運用した場合の裁定条件は，以下（2-36）のように，効率単位で測った産業用地の地代 $\pi^*_m(t)=\pi_m(t)/K_m(t)$ が家計の負担する利用転換費用に等しくなることである。

(2-36)　$\pi^*_m(t)=p_b(t)$.

(4)　政府部門

政府は，住民から徴収した所得税収をもって，公共投資に充当する。すなわち，

(2-37)　$\dot{G}(t)=\theta[r(t)A(t)+w(t)N(t)]$.

(5)　財市場

公共投資も既存の資源を費消して行われることから，以下の財市場均衡式が得られる[6]。

(2-38)　$Y_m(t)=C_m(t)+\dot{K}_m(t)+\dot{G}(t)$.

III　動学体系

1.　動学体系の構築に向けて

ここでは，本モデルにおける状態変数 $K_m(t)$ あるいは $q_L(t)$ 等の状態変数を決定する微分方程式体系すなわち動学体系を導出する。

はじめに，(2-7) 及び (2-36) より，以下 (3-1）が得られる。

(3-1)　$p_b(t)=zAL_m(t)^{z-1}n_m(t)^{\omega}$.

上記（3-1）及び（2-31）より，$p_b(t)$ を消去すると，

$$\frac{\omega A}{B}L_m(t)^z n_m(t)^{\omega-1}g(t)^{-1} =zAL_m(t)^{z-1}n_m(t)^{\omega}$$

が得られるが，これより，製造業部門の労働力の割合 $n_m(t)$ は，産業用地の水準 $L_m(t)$ 及び資

本１単位当たり公共サービスの水準 $g(t)$ の関数として表わされる。すなわち，

(3-2)　$n_m(t)=\frac{\omega}{zB}L_m(t)g(t)^{-1}$.

この (3-2) 及び (2-10′) を，労働市場の需給均衡式 (2-30′) に適用すると，以下 (3-3) のように，$L_m(t)$ が $g(t)$ の単調増加関数となる。すなわち，民間資本-社会資本比率が増大すれば土地の有効利用度が高まることがわかる。

(3-3)　$L_m(t)=\frac{zB}{\omega+z}g(t)\equiv L_m[g(t)]$

この (3-3) を (3-2) に適用することにより，$n_m(t)$ については，時点 t によらない一定値 n_m をとることがわかる。すなわち，

(3-4)　$n_m(t)=\frac{\omega}{\omega+z}\equiv n_m$.

また，この (3-4) より，地域 i における製造業部門に雇用される労働力の割合 $n_m(t)$ 及び土地利用転換サービス部門に雇用される労働力の割合 $n_b(t)$ はともに，時点 t によらず，毎期 0 と 1 との間に決定されることがわかる。

次に，(3-3) 及び (3-4) を (2-34) に適用することにより，市場利子率 $r(t)$ については，公共資本の水準と実物資本の水準の比率 $g(t)$ のみの関数となることがわかる。すなわち，

(3-5)　$r(t)=xA\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{\omega}\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^{z}g(t)^{z}$
$\equiv r[g(t)]$.

また，(3-3) 及び (3-4) を (2-7) 及び (2-8) に適用することにより，産業用地の地代 $\pi_m(t)$ 及び労働賃金の総計 $w(t)N(t)$ が，いずれも実物資本の水準 $K_m(t)$ の増加関数として表わされることがわかる。すなわち，

(3-6)　$\pi_m(t)$
$=zA\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{\omega}\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^{z-1}K_m(t)g(t)^{z-1}$,

(3-7)　$w(t)N(t)$
$=\omega A\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{\omega-1}\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^{z}K_m(t)g(t)^{z}$.

さらに，生産関数 (2-4′) は，(3-3) 及び (3-4) を適用することによって，以下 (3-8) のように書き換えることができる。

(3-8)　$Y_m(t)$
$=A\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{\omega}\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^{z}K_m(t)g(t)^{z}$
$\equiv \hat{A}g(t)^{z}K_m(t)$.

ただし，

(3-9)　$\hat{A}=A\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{\omega}\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^{z}$.

である。すなわち，製造業製品の生産物 $Y_m(t)$ は，$L_m(t)$ 及び $n_m(t)$ が時間を通じて一定であることにより，AK 型ならぬ $\hat{A}g(t)^{z}K_m$ 型の生産関数によって表わされる。

2.　定常的成長均衡とその動学的安定性

(1)　定常的成長均衡

本論における定常的成長均衡は，生産水準 $Y_m(t)$，消費水準 $C_m(t)$，実物資本 $K_m(t)$，社会資本 $G(t)$ さらには土地価格 $q_L(t)$ が時間を通じて同一の率 γ で成長するような均衡である。この点，次章 IV で詳しく論じるが，地域における成長率 γ は，(2-35) 及び (3-5) より，以下 (3-10) で与えられる。

(3-10)　$\gamma[g(t)]=r[g(t)]$
$=xA\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{\omega}\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^{z}g(t)^{z}$
$(=x\hat{A}g(t)^{z})$

すなわち，成長率 γ が，市場利子率と等しくなる点では奈良［2007］と同様である。

しかるに本モデルにおける成長率は，民間資本-社会資本比率 $g(t)$ の単調増加関数となり，税率 θ を増減するような政策変更によって，$g(t)$ も増減し，それに応じて成長率も増減することがわかるが，この点で奈良［2007］とは大きく異なる。

(2)　動学的体系の構築

はじめに，$\nu(t)\equiv q_L(t)L/K_m(t)$ 及び $c(t)\equiv C_m(t)/K_m(t)$ とおくと，社会資本の蓄積式（2-37）の両辺を $K_m(t)$ で除することにより，(3-7) 及び（3-10）を考慮して，

$$(3\text{-}11)\quad g(t)\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} =\theta\{x\hat{A}g(t)[1+\nu(t)]+(1-x)\hat{A}g(t)^z\}$$

を得る。次に，財市場の需給均衡式（2-38）に（3-8）及び（3-11）を適用し，両辺を $K_m(t)$ で除することにより，以下（3-12）が得られる。

$$(3\text{-}12)\quad \frac{\dot{K}_m(t)}{K_m(t)} =\hat{A}g(t)^z-c(t)-\theta\{x\hat{A}g(t)\cdot [1+\nu(t)]+(1-x)\hat{A}g(t)^z\}.$$

さらに，(2-33）を考慮しつつ，(2-29）の両辺を $K_m(t)$ で除すると，以下 (3-13) が得られる。

$$(3\text{-}13)\quad c(t)\frac{\dot{C}_m(t)}{C_m(t)} =\{(1-\theta)x\hat{A}g(t)^z+n-\rho\}c(t) -n\rho[1+\nu(t)].$$

最後に，(3-10)を考慮しつつ，(2-35)より，以下（3-14）を得る。

$$(3\text{-}14)\quad \frac{\dot{q}_L(t)}{q_L(t)}=x\hat{A}g(t)^z$$

いま，(3-12) 及び (3-13) より，以下 (3-15) が得られる[7)]。

$$(3\text{-}15)\quad \dot{c}(t)=c(t)^2+\{-(1-\theta)(1-x)\hat{A}g(t)^z +\theta x\nu(t)\hat{A}g(t)^z+n-\rho\}c(t) -n\rho[1+\nu(t)]\equiv\Gamma[c(t),\nu(t),g(t)].$$

次に，(3-14) から (3-12) を辺々差し引くことにより，

$$(3\text{-}16)\quad \dot{\nu}(t)=\{-(1-x)\hat{A}g(t)^z+c(t) +\theta[\hat{A}g(t)^z +x\nu(t)\hat{A}g(t)^z]\}\nu(t) \equiv\Lambda[c(t),\nu(t),g(t)]$$

が導かれる。最後に，(3-11) 及び (3-12) より，以下（3-17）を得る。

$$(3\text{-}17)\quad \dot{g}(t)=\theta[1+g(t)][\hat{A}g(t)^z +x\nu(t)\hat{A}g(t)^z] +g(t)c(t)-\hat{A}g(t)^{z+1} \equiv\Omega[c(t),\nu(t),g(t)]$$

以上（3-15)，(3-16）及び（3-17）が3状態変数 $c(t)$，$\nu(t)$ 及び $g(t)$ に関する完全な動学体系を構成する。

(3)　定常的成長均衡の存在と一意性

定常的成長均衡においては，

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{\dot{\nu}(t)}{\nu(t)}=\frac{\dot{g}(t)}{g(t)}=0$$

が成立するから，c，ν 及び g を，それぞれ定常状態における $c(t)$，$\nu(t)$ 及び $g(t)$ として，(3-15)，(3-16）及び（3-17）より，以下（3-18)，(3-19）及び（3-20）が成立する。

$$(3\text{-}18)\quad c^2+[-(1-\theta)(1-x)\hat{A}g^z+\theta x\nu\hat{A}g^z +n-\rho]c=n\rho(1+\nu),$$
$$(3\text{-}19)\quad (1-x)\hat{A}g^z=c+\theta(\hat{A}g^z+x\nu\hat{A}g^z),$$
$$(3\text{-}20)\quad \hat{A}g^{z+1}=\theta(1+g)(\hat{A}g^z+x\nu\hat{A}g^z)+gc.$$

上記のうち，(3-18) 及び (3-19) より，以下 (3-21）が得られる。

$$(3\text{-}21)\quad [(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^z]c=n\rho(1+\nu).$$

また，(3-19）及び（3-20）より，以下（3-22）が得られる。

$$(3\text{-}22)\quad xg=\theta(1+x\nu).$$

さらに，(3-19)，(3-22）より，以下（3-23）が得られる。

$$(3\text{-}23)\quad c=[(1-x)-xg]\hat{A}g^z.$$

ところで，(3-22）を（3-21）右辺に，(3-23）を (3-21)左辺にそれぞれ適用することにより，c，ν を消去すると，以下（3-24）が導かれる。

$$(3\text{-}24)\quad [(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^z][(1-x)-xg]\hat{A}g^z =n\rho\frac{xg-\theta(1-x)}{\theta x}$$

すなわち，(3-24)を g について解くと，定常的

成長均衡における民間資本–社会資本比率 g が求められ，この結果を（3-23）及び（3-22）に適用することで，それぞれ c，ν が求められる。以下に，定理 3-1 として，定常的成長均衡において，$c>0$，$\nu>0$ 及び $g>0$ が存在するための必要十分条件を示す。

定理 3-1　定常的成長均衡において，$c>0$，$\nu>0$ 及び $g>0$ が存在するには，民間資本–社会資本比率 g に関して以下（3-25）及び（3-26）が満たされねばならない（必要性）。逆に，以下（3-25）及び（3-26）が満たされる場合，定常的成長均衡 $c>0$，$\nu>0$ 及び $g>0$ が存在する（十分性）。

$$\text{(3-25)}\quad \hat{A}g^{z}<\frac{n-\rho}{\theta x},$$

$$\text{(3-26)}\quad \frac{(1-x)\theta}{x}<g<\frac{1-x}{x}.$$

（証明）　（3-25）が成り立たない，すなわち，

$$\hat{A}g^{z}\geqq\frac{n-\rho}{\theta x}$$

である場合，（3-21）において，$c>0$ ならば，$1+\nu\leqq0\Leftrightarrow\nu\leqq-1$ となり，$c>0$ と $\nu>0$ は同時に成立しない。また，（3-26）の前半の不等号が成り立たない，すなわち，

$$g\leqq\frac{(1-x)\theta}{x}$$

が成立する場合，（3-22）より，

$$1+\nu=\frac{xg-\theta(1-x)}{\theta x}\leqq0\Leftrightarrow\nu\leqq-1$$

であるから，$\nu>0$ が存在するには，

$$g>\frac{(1-x)\theta}{x}$$

が必要である。さらに，（3-26）の後半の不等号が成り立たない，すなわち

$$g\geqq\frac{1-x}{x}$$

である場合，（3-23）において，$g>0$ である限り，$c\leqq0$ となり，$c>0$ と $g>0$ は同時に成立しない。

以上により，（3-25）及び（3-26）が定常的成長均衡 $c>0,\nu>0$ 及び $g>0$ が存在することの必要条件であることがわかる。定理の後半部分，すなわち（3-25）及び（3-26）の十分性は自明である。 **（証明了）**

いま，g に関する 2 つの関数 $f_1(g)$ 及び $f_2(g)$ を，以下（3-27）及び（3-28）のように定義する。

$$\text{(3-27)}\quad f_1(g)=[(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^{z}]\hat{A}g^{z},$$

$$\text{(3-28)}\quad f_2(g)=\frac{n\rho}{\theta x}\cdot\frac{xg-\theta(1-x)}{(1-x)-xg}.$$

すなわち，$f_1(g)=f_2(g)$ は，（3-26）が成り立つ限りにおいて，（3-24）と同値であることは言うまでもない。ところで，（3-28）が，

$$\text{(3-28}'\text{)}\quad f_2(g)=-\frac{\dfrac{n\rho}{\theta x^2}(1-\theta)(1-x)}{g-\dfrac{1-x}{x}}-\frac{n\rho}{\theta x}$$

と変形することができること等により，$f_1(g)$ 及び $f_2(g)$ は，パラメータの値に関するある仮定のもとで，たとえば，次頁の図 III-1a 及び図III-1b のように描くことができる[8]。つまり，厳密な議論ではないが，定理 3-1 を満たす $g>0$ が一意に存在し得る。

（4）　定常的成長均衡の動学的安定性

ここでは，定常的成長均衡が局所的にいかなる動学的性質をもつかを検討する。はじめに，（3-15），（3-16）及び（3-17）を，定常的成長均衡 (c,ν,g) の近傍で線形近似することにより，以下（3-29）のような定数係数連立線形微分方程式にまとめることができる。

$$\text{(3-29)}\quad \begin{pmatrix}\dot{c}(t)\\ \dot{\nu}(t)\\ \dot{g}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma_c & \Gamma_\nu & \Gamma_g\\ \Lambda_c & \Lambda_\nu & \Lambda_g\\ \Omega_c & \Omega_\nu & \Omega_\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c(t)-c\\ \nu(t)-\nu\\ g(t)-g\end{pmatrix}.$$

ただし，Γ_c，Γ_ν 及び Γ_g は，$\Gamma(c(t),\nu(t),g(t))$ をそれぞれ，$c(t)$，$\nu(t)$ 及び $g(t)$ で偏微分し，均衡点 (c,ν,g) で評価したものであり，以下（3-30a），（3-30b）及び（3-30c）のように計算

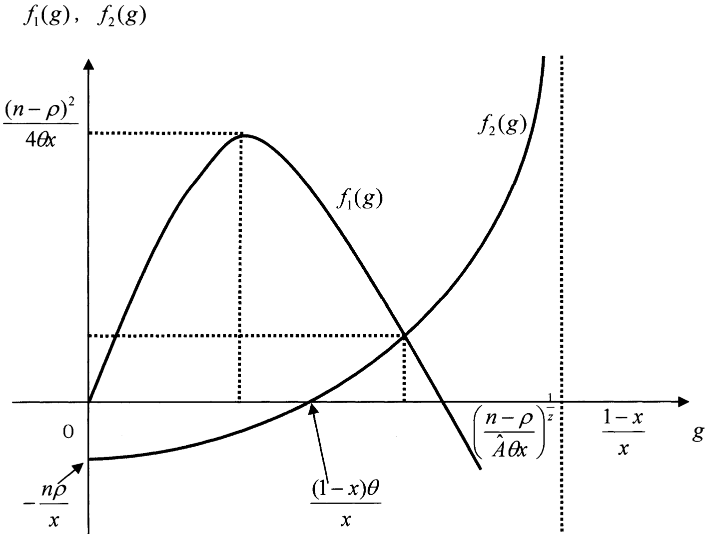


図 III-1a；$g>0$ の一意性

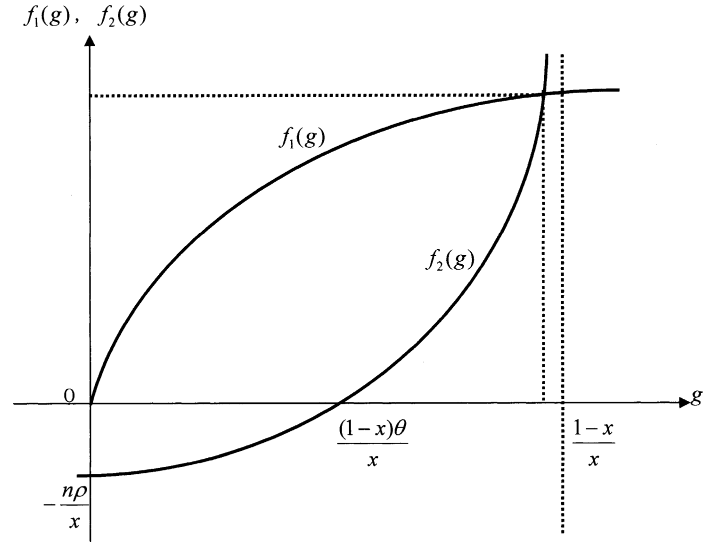


図 III-1b；$g>0$ の一意性

される。

(3-30a)　$\Gamma_c = c + [(n-\rho) - \theta x\hat{A}g^z]$,

(3-30b)　$\Gamma_\nu = -n\rho + \theta x\hat{A}g^z c$,

(3-30c)　$\Gamma_g = -z\hat{A}g^{z-1}[(1-\theta)(1-x) - xg + \theta]c$.

また，Λ_c, Λ_ν 及び Λ_g は，$\Lambda(c(t), \nu(t), g(t))$ をそれぞれ，$c(t)$，$\nu(t)$ 及び $g(t)$ で偏微分し，均衡点 (c, ν, g) で評価したものであり，以下 (3-31a)，(3-31b) 及び (3-31c) のように計算される。

(3-31a)　$\Lambda_c = \nu$,

(3-31b)　$\Lambda_\nu = \theta x \hat{A} g^z \nu$,

(3-31c)　$\Lambda_g = -z\hat{A}g^{z-1}[(1-x)-xg]\nu$.

さらに，Ω_c，Ω_ν 及び Ω_g は，$\Omega(c(t), \nu(t), g(t))$ をそれぞれ $c(t)$，$\nu(t)$ 及び $g(t)$ で偏微分し，均衡点 (c, ν, g) で評価したものであり，以下（3-32a），（3-32b）及び（3-32c）のように計算される。

(3-32a)　$\Omega_c = g$,

(3-32b)　$\Omega_\nu = \theta x(1+g)\hat{A}g^z$,

(3-32c)　$\Omega_g = [xz(1+g)-(x+z)]\hat{A}g^z$.

いま，定数係数連立線形微分方程式(3-29)の定数係数行列を，

$$M = \begin{pmatrix} \Gamma_c & \Gamma_\nu & \Gamma_g \\ \Lambda_c & \Lambda_\nu & \Lambda_g \\ \Omega_c & \Omega_\nu & \Omega_\nu \end{pmatrix}$$

とおき，M の行列式を $\mathrm{det}M$，対角要素の和を $\mathrm{tr}M$ とおく。また，3 次正方行列 M の 3 つの固有値を μ_1, μ_2, μ_3 とおくと，μ_1, μ_2, μ_3 は以下の特性方程式（3-33）の解である。

(3-33)　$$\mu^3 - \mathrm{tr}M\mu^2 + (\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1)\mu - \mathrm{det}M = 0.$$

このとき，3 特性根 μ_1, μ_2, μ_3 と $\mathrm{det}M$ 及び $\mathrm{tr}M$ の符号に関して以下の補題 3-2 を得る。

補題 3-2　特性方程式（3-33）の 3 つの特性根 μ_1, μ_2, μ_3 のうち 1 根のみ（あるいは 1 根の実部のみ）が負であるための必要十分条件は，以下（3-34）及び（3-35）がともに成り立つことである。

(3-34)　$\mathrm{det}M < 0$,

(3-35)　$\mathrm{tr}M > 0$.

(証明)　特性方程式 (3-33) は，以下 (3-33′) に書き換えることができる。

(3-33′)　$(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)(\mu-\mu_3) = 0$.

この，（3-33′）を（3-33）と対比させることにより，

$$\mathrm{det}M = \mu_1\,\mu_2\,\mu_3,\ \mathrm{tr}M = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

であることが容易にわかる。

いま，$\mathrm{det}M \geqq 0$ であれば，3 根（うち 2 根が互いに共役な虚根であればその実部）全てが非負あるいは 1 根のみ(あるいは 1 根の実部のみ)が非負で 2 根（互いに共役な虚根であればその実部）が非正のいずれかであり，1 根のみ(あるいは 1 根の実部のみ）が負にはなりえない。したがって，$\mathrm{det}M < 0$ でなければならない。また，$\mathrm{det}M < 0$ である場合，$\mathrm{tr}M \leqq 0$ であれば，3 根(うち 2 根が互いに共役な虚根であればその実部) 全てが非正となる。すなわち，1 根のみ(あるいは 1 根の実部のみ)が負になるには，$\mathrm{tr}M > 0$ が成り立たねばならない。以上で必要性が証明された。

逆に（3-34）及び（3-35）がともに成り立つ場合，特性根 μ_1, μ_2, μ_3 のうち 1 根のみ (あるいは 1 根の実部のみ）が負になることは自明であることから十分性がしたがう。　**(証明了)**

定理 3-3　定常的成長均衡 (c, ν, g) に収束する経路が (c, ν, g) の近傍において一意に存在するための必要十分条件は，定数係数連立線形微分方程式 (3-29) の定数係数行列 M に関して補題 3-2 の（3-34）及び（3-35）がともに成り立つこと，すなわち，M の特性根のうち 1 根のみ(あるいは 1 根の実部のみ)が負になることである[9)]。

(証明)　定数係数行列 M の特性根がいずれも実根になる場合に限定して証明する。

はじめに，定数係数連立線形微分方程式（3-29）の定常的成長均衡 (c, ν, g) の近傍における解経路は，以下（3-36）で表わされる。

$$(3\text{-}36)\quad \begin{cases} c(t)-c=C_1\nu_{11}e^{\mu_1 t}+C_2\nu_{21}e^{\mu_2 t} \\ \qquad +C_3\nu_{31}e^{\mu_3 t}, \\ \nu(t)-\nu=C_1\nu_{12}e^{\mu_1 t}+C_2\nu_{22}e^{\mu_2 t} \\ \qquad +C_3\nu_{32}e^{\mu_3 t}, \\ g(t)-g=C_1\nu_{13}e^{\mu_1 t}+C_2\nu_{23}e^{\mu_2 t} \\ \qquad +C_3\nu_{33}e^{\mu_3 t}. \end{cases}$$

ただし，$\nu_{11}, \nu_{21}, ..., \nu_{33}$ は，特性根 μ_1, μ_2, μ_3 の固有ベクトルの要素であり[10)]，C_1, C_2, C_3 は任意定数である。いま，3つの特性根のうち，μ_1 のみが負であることを仮定すると，(c, ν, g) の近傍において (c, ν, g) に収束する経路を表わす式は，以下で与えられる。

$$(3\text{-}37)\quad \begin{cases} c(t)-c=C_1\nu_{11}e^{\mu_1 t}, \\ \nu(t)-\nu=C_1\nu_{12}e^{\mu_1 t}, \\ g(t)-g=C_1\nu_{13}e^{\mu_1 t}. \end{cases}$$

この(3-37)より，初期時点 $(t=0)$ においては，以下が成立する。

$$(3\text{-}37')\quad \begin{cases} c(0)-c=C_1\nu_{11}, \\ \nu(0)-\nu=C_1\nu_{12}, \\ g(0)-g=C_1\nu_{13}. \end{cases}$$

しかるに，状態変数の初期値 $c(0)$，$\nu(0)$ 及び $g(0)$ のうち，値が定まっているのは $g(0)$ のみであるから，(3-37′)の3番目の式より，任意定数 C_1 が決定され，1番目，2番目の式より $c(t)$ 及び $\nu(t)$ の初期値 $c(0)$ 及び $\nu(0)$ が一意に決定される。このことは，1根のみが負になることにより，定常的成長均衡に収束する解経路が一意に定まることを意味する。

逆に特性根 μ_1, μ_2, μ_3 のうち3根すべてが負になる場合，2根が負になる場合は，いずれも定常的成長均衡に収束する解経路が局所的に無数に存在することになり，1根も負にならない場合，定常的成長均衡に収束する解経路は存在しない。 **(証明了)**

ところで，$\det M$，$\mathrm{tr}M$ は，それぞれ，以下(3-38)，(3-39) で与えられる。

$$(3\text{-}38)\quad \det M=\theta x\nu\hat{A}g^z\cdot\hat{A}g^{z-1}\Big\{[(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^z][(1-x)z-x(1+z)g]-\frac{n\rho}{\theta\hat{A}g^{z-1}}-\theta xzc\Big\},$$

$$(3\text{-}39)\quad \mathrm{tr}M=(1-z)c+\frac{n\rho(1+\nu)}{c}+[(xg-\theta)-x]\hat{A}g^z.$$

これら $\det M$ 及び $\mathrm{tr}M$ の符号を解析的に確定することは困難である。したがって次のIVにおいて税率 θ が変化することによる比較静学分析を，パラメータを特定化することによって行うが，その際，$\det M$ 及び $\mathrm{tr}M$ の符号についても検証する。

IV　公共投資と経済成長

直前のIIIでは，経済を表わす動学体系を，3つの状態変数 $c(t)$，$\nu(t)$ 及び $g(t)$ に関する連立微分方程式（3-15），(3-16) 及び (3-17) にまとめ，定常的成長均衡 (c, ν, g) の存在と一意性を示すとともに，(c, ν, g) に収束する経路が一意に定まるための条件を検討した（定理3-3)。仮に，そのような条件が満たされる場合，歴史的に与えられた $g(0)$ のもと，$c(0)$，$\nu(0)$ を適当に選択することによって，経済は一定時間経過後，(c, ν, g) に収束し，以後そこに止まる。定常的成長均衡における民間資本-社会資本比率を求める式（3-24）を以下に改めて（4-1）として再掲する。

$$(4\text{-}1)\quad [(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^z][(1-x)-xg]\hat{A}g^z =n\rho\frac{xg-\theta(1-x)}{\theta x}$$

また，定常的成長均衡に収束した後には，生産水準 $Y_m(t)$，消費水準 $C_m(t)$，実物資本 $K_m(t)$ 及び土地価格 $q_L(t)$，さらには社会資本 $G(t)$ が，時間を通じて以下 (4-2) で表わされるような一定率 γ^* で成長することになる[11)]。

(4-2)　$\gamma^* = r(g)$

$$= xA\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{\omega}\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^{z} g^{z} (= x\hat{A}g^{z}).$$

また，生産的な用途に利用される土地の水準 $L_m(t)$ も以下（4-3）で表わされるように，定常的成長均衡に収束した後には一定の値をとる。

(4-3)　$L_m = \dfrac{zB}{\omega+z} g = L_m(g)$

しかるに，税率 θ の増減が g，γ^*，L_m に及ぼす影響を比較静学によって解析的に分析するのは困難である[12]。したがって，ここでは，税率 θ の増減が及ぼす影響につき，パラメータの値を特定化することによって検討することとする。モデルの説明の箇所 (II) で設定したパラメータのうち，n, ρ, x, z, ω，また，A, B, L の各値を以下のように固定する。

$n = 0.008$, $\rho = 0.005$, $x = 0.200$, $z = 0.300$,
$\omega = 0.500$,
$A = 5.000$, $B = 5.000$, $L = 0.500$

上記のうち，$\omega = 0.500$ としたのは，平成 17 暦年における国内総生産に占める雇用者報酬の割合が約 0.52 であることによる（『国民経済計算年報平成 19 年版』）。

ここでの分析は，税率 θ の値を 0.0001 から 0.0060 まで 0.0001 刻みで増やしていき，それらに対応する民間資本-社会資本比率 g，成長率 γ^*，さらには遊休地の割合 L_V/L を，(4-1)，(4-2)，(4-3) 及び (2-32) より計算し，その結果をそれぞれ次頁の図 IV-1 及び IV-2，次々頁の IV-3 に表わした。

図 IV-1，IV-2 によれば，税率 θ が増大することによって民間資本-社会資本比率 g，経済成長率 γ^* は当初単調に増大するが，θ がある臨界点を超えると単調減少に転じることがわかる。そのような g，γ^* を最大化する θ は，0.0025 と 0.0026 の間に求めることができる。また，図 IV-3 によれば，g，γ^* を最大化する θ は，遊休地の割合 L_V/L を最小化することもわかる。

尚，数値シミュレーションを行うに際して設定した θ の範囲においては，$\det M < 0$ 及び $\mathrm{tr} M > 0$ がいずれも満たされている。このことは，定常的成長均衡 (c, ν, g) に収束する経路が，少なくとも (c, ν, g) の近傍においては一意に存在するための必要十分条件が満たされていることを意味する。

以上に示した数値シミュレーションの結果が意味することは，適切な税率のもと，所得税を財源として公共投資を行うことにより，都市における成長率及び土地の有効利用度がともに高まる点である[13]。逆に税率が高すぎる場合，民間の生産活動が阻害され，却って都市における土地の生産性が低下し，成長率も低下する。

V　結　　語

直前の IV までにおいて行った一般均衡動学モデルによる分析と，分析結果を改めて記すと以下のようになる。すなわち，資本蓄積が集積効果として作用し，公共投資による社会資本の整備が土地利用転換を効率化する枠組みにおいて，あるパラメータの組み合わせと適切な初期値の設定のもとでは，実物資本，社会資本，消費水準及び地価がいずれも市場利子率に等しい値で成長するような定常的成長均衡に向かう経路に収束し，そこに止まる。そして，公共投資の財源としての所得税率がある一定以下の水準のもとでは，税率を高めて社会資本の整備を進めることにより，都市における成長率を高めるとともに，土地の有効利用度も高める。すなわち，遊休地の割合を低下させる。

しかるに，本論においては，奈良［2007］同様，閉鎖的な単一の都市が分析の対象となっているに過ぎないため，都市の公共投資の配分の変化が地域間の人口移動及び資本移動を通じて，地域の成長あるいは土地の有効利用度に及ぼす影響を分析することが不可能である。前出近藤［2003］においても，2 つの地域間の公共投資の配分変化がそれぞれの地域の経済成長及び経済厚生に及ぼす影響が分析されている。した

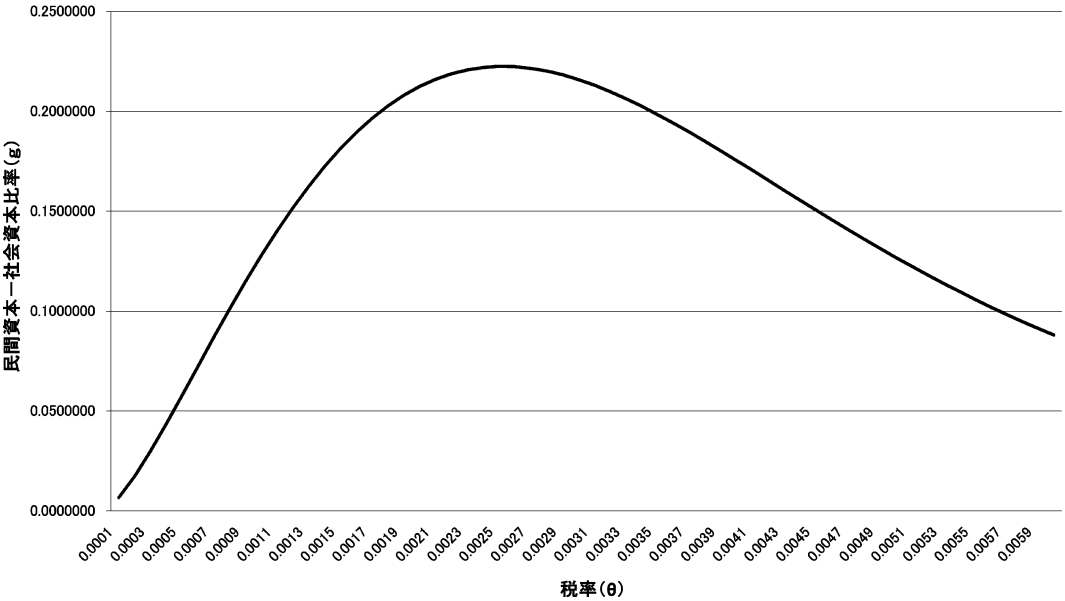


図 IV-1；税率（θ）の変化が民間資本－社会資本比率（g）に及ぼす影響

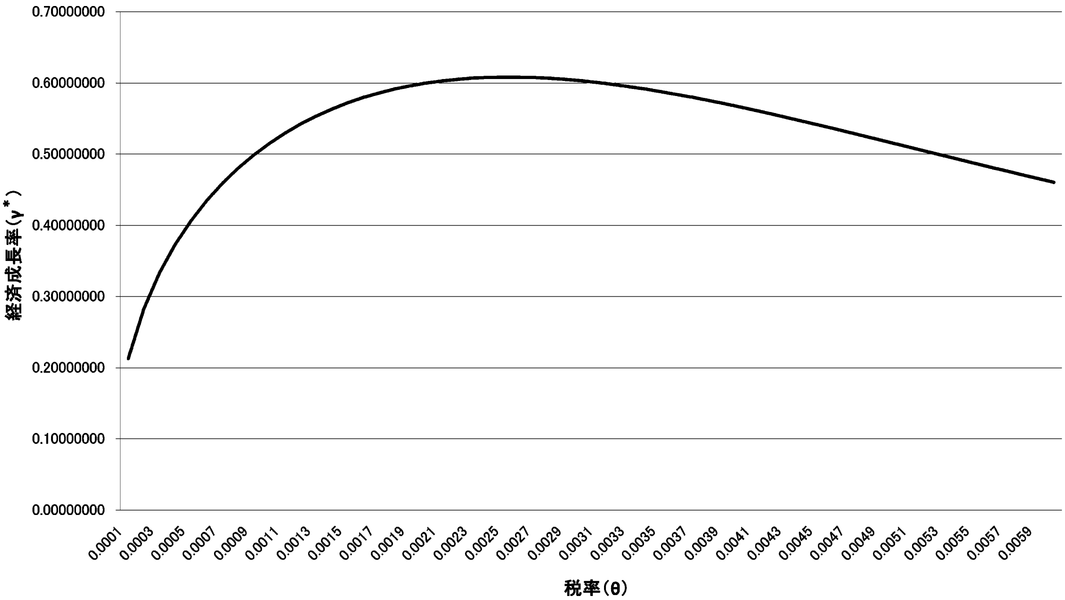
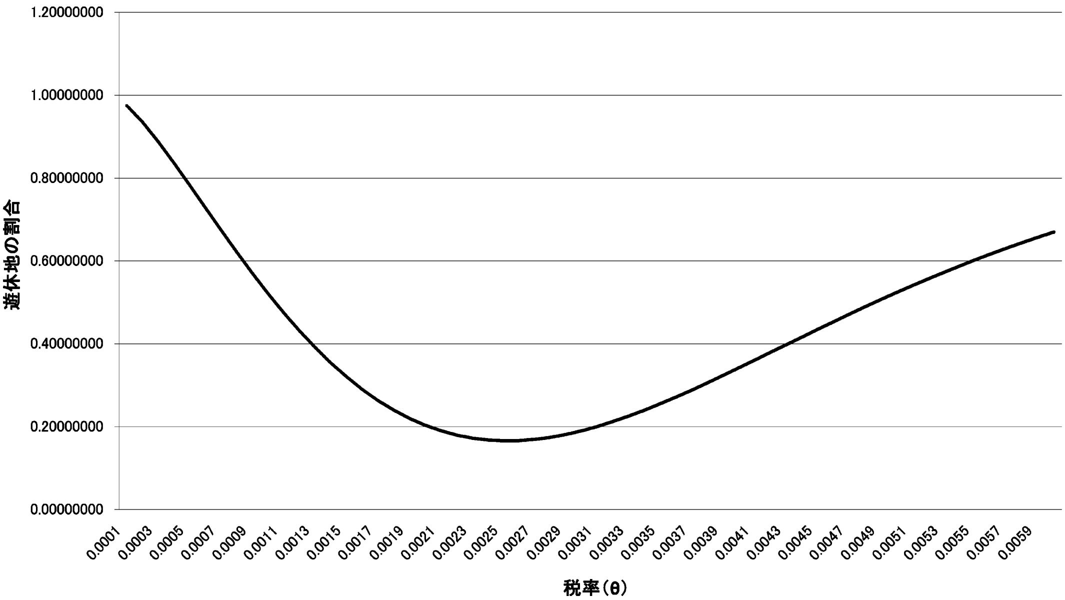


図 IV-2；税率（θ）の変化が経済成長率（γ^*）に及ぼす影響

がって，近藤，Funke＝Strulik［1999］，Fujita［2003］及び Bröcker［2004］にならい，モデルを開放体系に拡張して分析する，具体的には人口，資本のいずれかあるいはその両方が地域の境界を超えて移動するような枠組みに拡張して分析することを今後の課題とする。



図Ⅳ-3；税率（θ）の変化が遊休地の割合に及ぼす影響

注

1) 奈良［2007］で引用したと同様，Arrow［1962］あるいは，Romer［1986］が主張するような，生産活動に対する外部効果を意味する。

2) ところで，経済全体の製造業部門の生産関数（2-4′）は，以下（a-1）のようにも書き換えることができる。

(a-1)　$Y_m(t)=AK_m(t)^x[K_m(t)L_m(t)]^z[K_m(t)n_m(t)]^{\omega}.$

この（a-1）より，民間資本の蓄積が外生的に土地増大的技術進歩及び労働増大的技術進歩を同時にもたらすことがわかる。また，その意味で，$L_m^*(t)\equiv K_m(t)L_m(t)$ は，効率単位で測った製造業部門の生産活動に投入される土地の水準であると解釈できる。

3) N.P.G. 条件（2-16）と横断条件（2-17）が同値であることは，以下のように証明することができる。いま，$\int r(\mu)d\mu=R(\mu)$ とおくと，

$$\exp\left(-(1-\theta)\int_t^{\nu} r(\mu)d\mu\right)=e^{(1-\theta)R(t)-(1-\theta)R(\nu)}$$

であるから，$e^{(1-\theta)R(t)}\neq 0$ を考慮すると，(2-16）は，以下（a-2）と同値である。

(a-2)　$\lim_{\nu\to\infty} a(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}=0.$

ここに，(2-15）より，

$$q(t)=q(0)\exp\left\{\int_0^t[\rho-(1-\theta)r(\nu)]d\nu\right\}$$
$$=q(0)e^{(1-\theta)R(0)}\cdot e^{\rho t-(1-\theta)R(t)}$$

が得られるから，以下が計算される。

$$q(\nu)e^{-\rho\nu}a(s,\nu)=q(0)e^{(1-\theta)R(0)}\cdot e^{\rho\nu-(1-\theta)R(\nu)}\cdot e^{-\rho\nu}a(s,\nu)=q(0)e^{(1-\theta)R(0)}\cdot e^{-(1-\theta)R(\nu)}a(s,\nu)$$

しかるに，$q(0)\neq 0$ であるから，(a-2) より，以下がしたがう。

$$\lim_{\nu\to\infty} q(\nu)e^{-\rho\nu}a(s,\nu)=q(0)e^{(1-\theta)R(0)}\cdot\lim_{\nu\to\infty} a(s,\nu)e^{-(1-\theta)R(\nu)}=0.$$

4) Leibnitz's Rule とは，$g(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(s,t)ds$ とおくと，

(a-3)　$g'(t)=f(\beta(t),t)\beta'(t) -f(\alpha(t),t)\alpha'(t) +\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f(s,t)}{\partial t}ds.$

が成立するという公式である (Kamien and Schwartz ［1991］参照)。

5)　(2-29) は以下に示すように，(2-23′) の両辺を時間 t で微分し，(2-26)，(2-28) 及び再び (2-23′) を適用することにより，導出される。

$$\begin{aligned}\dot{C}_m(t)&=\rho[\dot{A}(t)+\dot{H}(t)]\\&=\rho\{(1-\theta)r(t)A(t)+(1-\theta)N(t)w(t)\\&\quad-C_m(t)\}+\rho\{[(1-\theta)r(t)+n]H(t)\\&\quad-(1-\theta)N(t)w(t)\}=\rho\{(1-\theta)r(t)A(t)\\&\quad-C_m(t)+[(1-\theta)r(t)+n]H(t)\}\\&=\rho(1-\theta)r(t)A(t)-\rho C_m(t)\\&\quad+\rho[(1-\theta)r(t)+n]\left\{\frac{1}{\rho}C_m(t)-A(t)\right\}\\&=[(1-\theta)r(t)+n-\rho]C_m(t)-\rho nA(t).\end{aligned}$$

6)　財市場の均衡式 (2-38) は，以下のプロセスによっても導出することができる。はじめに，(2-33) の両辺を時間 t で微分すると，(2-35) を考慮しつつ，

(a-4)　$\dot{A}(t)=\dot{K}_m(t)+r(t)q_L(t)L$

が得られる。他方，(2-28) より，(2-37) を考慮しつつ以下が導出される。

(a-5)　$\dot{A}(t)=[r(t)A(t)+N(t)w(t)] -\dot{G}(t)-C_m(t)$

上記 (a-4) 及び (a-5) より，(2-30)，(2-35) を考慮しつつ，以下を得る。

$$\dot{K}_m(t)+\dot{G}(t)+C_m(t) =r(t)K_m(t)+w(t)N_m(t)+w(t)N_b(t)$$

さらに，(2-10) 及び (2-11) を考慮することにより，

$$\dot{K}_m(t)+\dot{G}(t)+C_m(t) =r(t)K_m(t)+w(t)N_m(t)+p_b(t)L_m^*(t)$$

が計算されるが，この右辺に (2-36) を適用すると，生産関数 (2-4) あるいは (2-4′) の 1 次同次性により，$Y_m(t)$ に等しくなることがわかるから，(2-38) を得る。

7)　(3-13) から $c(t)\times$(3-12) を減じることにより，

(a-6)　$\dot{c}(t)=[-(1-\theta)x\hat{A}g(t)^z+n -\rho]c(t)+\theta c(t)[\hat{A}g(t)^z +xv(t)\hat{A}g(t)^z] -c(t)\hat{A}g(t)^z +c(t)^2-n\rho[1+v(t)]$

が得られるが，これより，(3-15) がしたがう。

8)　図 III-1a 及び b では，それぞれ，以下 (a-7) 及び (a-8) が仮定されている。

(a-7)　$\left(\frac{n-\rho}{\hat{A}\theta x}\right)^{\frac{1}{z}}<\frac{1-x}{x}$

(a-8)　$\left(\frac{n-\rho}{\hat{A}\theta x}\right)^{\frac{1}{z}}>\frac{1-x}{x}$

9)　定常的均衡に収束する解経路が一意であるための必要十分条件は先決変数と安定根の数が等しくなることの一般的な証明は，Buiter ［1984］ によってなされている。

10)　固有値 μ_1,μ_2,μ_3 の固有ベクトルをそれぞれ ν_1,ν_2,ν_3 とおくと，以下のようになる。

$$\nu_1=\begin{pmatrix}\nu_{11}\\\nu_{12}\\\nu_{13}\end{pmatrix},\ \nu_2=\begin{pmatrix}\nu_{21}\\\nu_{22}\\\nu_{23}\end{pmatrix},\ \nu_3=\begin{pmatrix}\nu_{31}\\\nu_{32}\\\nu_{33}\end{pmatrix}.$$

11)　状態変数のうち非先決変数の初期値を適切に選択することによって経済が，一定時間経過後，定常的成長均衡 (c,v,g) に収束し，そこに止まる経路が最適な経路であることは奈良［2007］と同様に証明することができる。

12)　(4-1) を税率 θ について全微分し，整理すると，以下 (a-9) のようになる。

(a-9)　$\frac{dg}{d\theta} =\frac{v\hat{A}g^z}{\det M}\{x\cdot\theta x\hat{A}g^z c-n\rho(1+xv)\} =\frac{v\hat{A}g^z}{\det M}\{x[(n-\rho)c-n\rho(1+v)] -n\rho(1+xv)\}$

13)　Futagami＝Morita＝Shibata で行われているのと同様，本来ならば経済成長率を最大化する税率 $\theta=\theta^*$ が，同時に生涯効用あ

るいは経済厚生を最大化する税率であるかすなわち最適税率になり得るかを検討しなければならないが，その点については今後の課題とする。

参考文献

[1] Arrow, K.J. [1962], "The Economic Implications of Learning by Doing," *Review of Economic Studies* 29, 155-173.

[2] Barro, R.J. [1990], "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth, " *Journal of Political Economy* 98, s103-s125.

[3] Barro, R.J. and Sala-i-Martin [1992], "Public Finance in Models of Economic Growth," *Review of Economic Studies* 59, 645-661.

[4] Barro, R.J. and Sala-i-Martin [1995], *Economic Growth*, McGraw-Hill.

[5] Bröcker, J. [2004], "Agglomeration and Knowledge Diffusion," Economics Working Paper, Christian-Albrechts-Universität Kiel.

[6] Buiter, W.H. [1984], "Saddlepoint Problems in Continuous Time Rational Expectations Models : A General Method and Some Expectatious Macroeconomic Examples," *Econometrica* 52, 665-680.

[7] Fujita, M. [2003], "Does Geographical Agglomeration Foster Economic Growth? And Who Gains and Loses From It?," *Japanese Economic Review* 54, 121-145.

[8] Funke, M. and Strulik, H. [1999], "Growth and Convergence in a Two-Region Model of Unified Germany," CESifo Working Paper Series.

[9] Futagami, K. and Morita, Y. and Shibata, A. [1993], "Dynamic Analysis of an Endogenous Growth Model with Public Capital," *Scandinavian Journal of Economics* 95, 607-625.

[10] Futagami, K. and Shibata, A. [2000], "Growth Effects of Bubbles in an Endogenous Growth Model," *The Japanese Economic Review* 51, 221-235.

[11] Kamien, M.I. and Schwartz, N.L. [1991], *Dynamic Optimization*, North-Holland.

[12] 国土交通省[2007b]，『平成 19 年版土地白書』，国立印刷局.

[13] 近藤広紀[2003]，「空間集積を伴う内生的成長モデルにおける公共投資の最適規模と地域間配分の分析」，ESRI Discussion Paper Series, 内閣府経済社会総合研究所.

[14] Mino, K. and Shibata, A. [1995], "Monetary Policy, Overlapping Generations and Patterns of Growth," *Economica* 62, 179-194.

[15] 内閣府経済社会総合研究所編[2007]，『国民経済計算年報平成 19 年版』，メディアランド.

[16] 奈良　卓[1997]，「土地課税の経済分析」，研究年報『経済学』(東北大学経済学会)59, 75-90.

[17] 奈良　卓 [2000]，「土地課税の経済分析—内生的土地利用技術進歩モデルの構築に向けて—」，『八戸大学紀要』20, 63-81.

[18] 奈良　卓 [2001a]，「土地課税の経済分析—内生的土地利用技術進歩—」，『八戸大学紀要』21, 22, 69-87.

[19] 奈良　卓[2001b]，「土地課税の経済分析—$\theta>0$ の場合における一考察—」，『八戸大学紀要』23, 53-72.

[20] 奈良　卓[2003]，「土地課税の経済分析—4 部門土地利用技術進歩モデルを用いた分析—」，研究年報『経済学』(東北大学経済学会) 64, 443-456.

[21] 奈良　卓[2007]，「集積の経済と都市の成長—Weil 型重複世代モデルを用いた分析—」，『八戸大学紀要』34, 33-51.

[22] 野口悠紀雄[1985]，「土地課税が都市的土地利用に与える影響」，『経済研究』36, 15-22.

[23] Romer, P.M. [1986], "Increasing

Returns and Long-Run Growth, " *Journal of Political Economy* 94, 1002-1037.
[24] 佐々木公明・張　陽 [2005],『都市サブセンター形成の経済分析』, 有斐閣.
[25] Weil, P. [1989], "Overlapping Families of Infitely-Lived Agents," *Journal of Public Economics* 38, 183-198.