集積の経済と都市の成長

―― 社会的厚生に関する一考察 ――

奈　良　　　卓

目次

I　序　　論

奈良［2008］では，都市における土地の有効利用を促進する重要な方策は，(i) 集積の効果と成長を通じて都市全体の生産性を高め，都市内にある土地が生産的な用途に利用転換されたならば得られる収益を高めること，(ii) 土地利用転換を効率的に行うメカニズムを確立すること，の 2 つのチャネルを通じて利用転換のインセンティブを与えることであるという問題意識に立脚し，一般均衡動学モデルを用いた分析がなされた。

上記に掲げた土地利用転換のインセンティブを与える 2 つのチャネルのうち，(ii) に関しては，正の集積効果と負の集積効果とをあわせもつ生産関数を構築することで，モデルに反映した。すなわち，Arrow［1962］，Romer［1986］及び Lucus［1988］によって提唱された，知識やアイディア・ノウハウのスピルオーバーが引き起こす外部効果による生産性の向上を正の集積効果とみなし，都市への人口密集が混雑を引き起こして生産性を低下させる外部効果を負の集積効果とみなし[1]，生産関数を構築した。

2 つ目のチャネル，すなわち (ii) に関しては，道路等社会的資本の整備によって土地利用転換が効率化する枠組みを構築した。すなわち，Futagami＝Morita＝Shibata［1993］が提唱したような，所得税によってファイナンスされたストックとしての社会資本が，生産活動としての土地利用転換を遂行する上で外部効果として作用するような生産関数を構築した。生産活動におけるストックとしての社会資本の役割に着目したのは，平成 18 暦年における公的支出に占める公的総固定資本形成の割合が約 19% と無視できないほど大きな値である(『国民経済計算年報平成 20 年版』) という現実の経済のあり方を勘案したからである。

以上の枠組みに基づき，奈良［2008］では，はじめに，あるパラメータの組み合わせと適切な初期値の設定のもとでは，民間資本，社会資本，消費水準及び地価がいずれも市場利子率に等しい値で成長するような定常的成長均衡に向かう経路が局所的に一意に存在することを確認し

八戸大学ビジネス学部

[1] 都市への人口密集が混雑を引き起こして生産性を低下させる状況をモデル化した先行研究として Rabenau［1979］を挙げることができる。

た。その上で，公共投資の財源としての所得税率の引き上げによって，民間資本に対する社会資本の割合及び経済成長率が高まるか，また，土地の有効利用度が高まるかを，各生産要素の分配率等パラメータの値を特定化する数値シミュレーションによって分析した。分析の結果，ある所得税率のもとで，定常的成長均衡における民間資本に対する社会資本の割合及び経済成長率が最大化されるとともに，遊休地の割合が最小化されることがわかった。すなわち，所得税率がある一定以下の水準のもとでは，税率を高めて公共投資を行うことにより，定常状態における民間資本に対する社会資本の割合及び経済成長率とも高められるとともに，土地の有効利用度も高められることがわかった。

しかるに，奈良[2008]では，数値シミュレーションに終始し，経済成長率を最大化する税率の経済学的な意味づけが十分明らかにされていない。また，経済成長と社会的厚生との関連，より具体的には，経済成長率を最大化する所得税率が同時に社会的厚生を最大化するかについて論じられていない。

フローとしての公共サービスに焦点を当て，公的支出が成長を持続させるメカニズムを構築，経済成長率を最大化する所得税率が同時に社会的厚生を最大化するかを分析した先行研究として Barro [1990] を挙げることができるが，Barro においては，社会的厚生が経済成長率の増加関数であることを証明することにより，経済成長率を最大化する所得税率と社会的厚生を最大化するそれとが一致することが結論づけられている。また，社会的厚生及び経済成長率を最大化する税率は，生産水準の公的支出に対する弾力性に等しくなることが証明されている。しかるに Barro においては，ストックとしての社会資本の持続的成長に果たす役割が考慮されていない。

これに対し，前出 Futagami＝Morita＝Shibata [1993] では，ストックとしての社会資本が成長を持続させるような枠組みのもと，経済成長率を最大化する所得税率は社会的厚生を最大化しないこと及び成長率を最大化する所得税率は社会的厚生を最大化するそれよりも高いことが結論づけられており，Greiner and Hanusch［1998］においても，経済成長率を最大化する税率は社会的厚生を最大化するそれとは一致しない旨結論づけられている。また，Monteiro and Turnovsky［2008］は，物的資本，人的資本及びフローとしての公的支出を投入して生産活動を行う 2 つの部門，つまり最終財部門及び教育部門を想定，公共投資及び教育投資といった 2 種類の公的支出が成長を持続させる枠組みを構築し，成長率を最大化する公的支出の生産に占める割合は，社会的厚生を最大化するそれよりも高いことを結論づけている。

上記 Futagami＝Morita＝Shibata，Greiner and Hanusch 及び Monteiro and Turnovsky のいずれにおいても本源的生産要素としての土地がモデルの中で考慮されていないが，とりわけ都市の生産活動における土地が希少な資源であることを考慮すると，都市を分析対象とするならば，土地を生産要素に含めたモデルによって分析する必要がある。奈良［2008］においては，経済成長率を最大化する税率と有効利用されている土地の割合を最大化する税率とが一致することが結論づけられているが，はたしてかかる税率は最適税率たりうるのか？

本論の目的は，奈良[2008]ではなされなかった，経済成長率を最大化する税率を解析的に導出し，その経済学的な意味づけを明らかにすること，また，経済成長率を最大化する所得税率が社会的厚生を最大化するかを検討することにある。

本論文における次章以下の構成は以下のとおりである。次の II では，奈良［2008］における基本的なフレームワークを振り返り，III では動学分析を行う。IV では，経済成長率を最大化する税率を解析的に導出してその経済学的な意味づけを明らかにするとともに，経済成長率を最大化する所得税率が社会的厚生を最大化するか

を検討する。最後のⅤでは，結論及び今後の課題を述べる。

Ⅱ モデル

閉鎖的な単一の都市において，企業及び家計の各時点における行動決定と市場での取引から，土地利用転換を効率的に行うための公共投資の財源とすべく，政府が家計に対して所得税を課すことを考慮した短期均衡式導出までのプロセスを説明することとする。そして，経済主体の行動を，Futagami and Shibata［2000］同様，Weil［1989］によって提示された連続型重複世代モデルの枠組みで論じる。

1. 人口に関する仮定

s 期生まれの世代の人口を

(2-1)　$dN(s)=ne^{ns}$

とおく。このとき，t 期における総人口 $N(t)$ は，初期値を $N(0)=1$ として，

(2-2)　$$N(t)=\int_{-\infty}^{t}dN(s)ds=n\int_{-\infty}^{t}e^{ns}ds=n\left[\frac{1}{n}e^{ns}\right]_{-\infty}^{t}=e^{nt}$$

と計算される。また，これより，

(2-3)　$\dot{N}(t)/N(t)=n$

が得られるから，この経済における人口増加率は一定率 n である。以後一貫して労働人口は総人口に等しいことを仮定する。

2. 企業の行動

完全競争の仮定のもと，両地域とも生産活動を行う部門として，合成財部門及び土地利用転換サービス部門を想定する。

(1)　製造業部門

合成財部門は実物資本，土地及び労働を用いて日常生活に必要なあらゆる財，すなわち合成財（composite good）及び実物資本の生産を行う。ただし，合成財部門が生産する資本（以後，社会資本と区別するため，民間資本と表示する）は，実物資本及び知識資本両者の側面を併せもつ。第 t 期における代表的企業の生産物を $\hat{y}_m(t)$ とし，また，合成財部門の生産活動に使用される土地（以下，産業用地と表示する）及び合成財部門に投入される労働力をそれぞれ $\hat{k}_m(t)$, $\hat{l}_m(t)$, $\hat{n}_m(t)$ として，次の Cobb-Douglas 型の生産関数を想定する。

(2-4)　$$\begin{aligned}\hat{y}_m(t)&=F(\hat{k}_m(t),\hat{l}_m(t),\hat{n}_m(t))\\&=A\hat{k}_m(t)^x\hat{l}_m(t)^z\hat{n}_m(t)^\omega K_m(t)^\lambda N(t)^\varepsilon,\\&0<x<1,\ 0<z<1,\ 0<\omega<1,\\&x+z+\omega=1,\ \lambda>0,\ \varepsilon<0.\end{aligned}$$

上記(2-4)における $K_m(t)^\lambda$ は，経済全体に存在する民間資本が生産活動にもたらす正の外部効果（集積の経済）であり，$N(t)^\varepsilon$ は，都市人口の増大が生産活動にもたらす負の外部効果（集積の不経済）であるものとする。ここに，両地域とも企業規模は等しく，企業数は人口 $N(t)$ に等しいものとする。また，$K_m(t)$，$L_m(t)$，$N_m(t)$ を，それぞれ民間資本の総量，合成財部門の生産活動に使用される土地（産業用地）の水準及び労働力の水準であるものとすると，以下(2-5)が成立する。

(2-5)　$$\begin{aligned}K_m(t)&=N(t)\hat{k}_m(t),\\L_m(t)&=N(t)\hat{l}_m(t),\\N_m(t)&=N(t)\hat{n}_m(t).\end{aligned}$$

ここに，$\lambda=1-x$ 及び $\varepsilon=-\omega$ とおくと，生産関数（2-4）は，以下（2-4′）のように書き換えられる。

(2-4′)　$Y_m(t)=AL_m(t)^z n_m(t)^\omega K_m(t)$.

ただし，$Y_m(t)$ は経済全体における合成財部門の生産水準であり，$n_m(t)\equiv N_m(t)/N(t)$ は，総人口 $N(t)$ に占める合成財部門に雇用される労働力の水準 $N_m(t)$ の割合である。

次に，合成財及び民間資本の価格を1とする

(numeraire)。また，資本レンタル率，地代，合成財部門における名目労働賃金率を，それぞれ $r_m(t)$，$\pi_m(t)$，$w_m(t)$ とおくと，合成財部門の利潤最大化行動により，以下（2-6）～(2-8）が導かれる。

(2-6)　$r_m(t)=xAL_m(t)^z n_m(t)^\omega$,

(2-7)　$\pi_m(t)=zAL_m(t)^{z-1} n_m(t)^\omega K_m(t)$,

(2-8)　$w_m(t)=\omega AL_m(t)^z n_m(t)^{\omega-1} K_m(t) N(t)^{-1}$.

(2)　土地利用転換サービス部門

土地の用途選択はその時点の土地所有者によって行われるため，生産的土地（産業用地）については毎期売却の際に更地へ利用転換することとなる。そこで，土地の利用転換に専業する部門，すなわち，土地利用転換サービス部門の存在を仮定する。土地利用転換は，一定量の労働力を投入して行われる。第 t 期に提供される土地利用転換サービスの総量を $Y_b(t)$，投入される労働力及びその労働力全体に占める割合を，それぞれ $N_b(t)$ 及び $n_b(t)$ として，また，土地利用転換サービスを生産するに際して無償で利用可能なストックとしての社会資本を $G(t)$ として次に示すような簡単な生産関数を仮定する。

(2-9)　$$Y_b(t)=BN_b(t)\left(\frac{G(t)}{N(t)}\right)=Bn_b(t)G(t),\ B>0.$$

上記は，土地利用転換サービス 1 単位の生産に必要な労働力は，$N(t)/BG(t)$ であることを意味する。すなわち，Futagami＝Morita＝Shibata らが想定しているように，ストックとしての公共資本は，混雑によって生産活動におけるサービス水準が低下するが，ここでは合成財部門同様人口増加による混雑を想定する。いま，効率単位で測った 1 単位の産業用地の利用転換に，1 単位のサービスを投入するものとする。また，$L^*_m(t)\equiv K_m(t)L_m(t)$ を効率単位で測った合成財部門の生産活動に投入される土地の水準として，土地利用転換サービスの需給均衡式は，以下（2-10）で与えられる。

(2-10)　$L^*_m(t)=Bn_b(t)G(t)$.

この（2-10）は，$g(t)\equiv G(t)/K_m(t)$ として，以下（2-10′）のように書き換えることができる。

(2-10′)　$L_m(t)=Bn_b(t)g(t)$.

いま，土地利用転換サービス 1 単位の価格を $p_b(t)$，土地利用転換部門における名目賃金を $w_b(t)$，同部門の第 t 期における利潤は，労働力 $N_b(t)$ の関数として，

$$\Pi_b(N_b(t))=p_b(t)BN_b(t)\left(\frac{G(t)}{N(t)}\right)-w_b(t)N_b(t)$$

と表わされる。したがって，サービス生産量が正になるような完全競争均衡は，

(2-11)　$w_b(t)N(t)=Bp_b(t)G(t)$

で与えられる。

3.　家計の行動

(1)　家計の効用関数と最適化問題

いま，s 期生まれの代表的家計の t 期における合成財の消費水準を $c_m(s,t)$ とおく。このとき，同世代が任意の t 時点に直面する生涯効用 $U(c_m(s,t))$ は，割引率 $\rho\geqq 0$ のもと，

(2-12)　$$U(c_m(s,t))=\int_t^\infty \log c_m(s,v)e^{-\rho(v-t)}dv$$

と表わされる。ただし，$\rho<n$ を仮定する。

次に，s 期世代の家計の t 期における労働所得及び非人的資産 (non-human wealth) をそれぞれ $w(s,t)$ 及び $a(s,t)$ とおくと，家計の直面する予算制約式は，所得税率 θ のもと以下（2-13）で表わされる。

(2-13)　$$\frac{da(s,t)}{dt}=(1-\theta)[r(t)a(s,t)+w(s,t)]-c_m(s,t).$$

ゆえに，家計が直面する最適化問題は，改めて以下（P）のように記すことができる。

$$
\text{(P)}\quad
\begin{aligned}
&\max_{c,a}\int_t^{\infty}\log c_m(s,v)e^{-\rho(v-t)}dv,\\
&s.t.\frac{da(s,t)}{dt}=(1-\theta)[r(t)a(s,t)\\
&\qquad\qquad +w(s,t)]-c_m(s,t).
\end{aligned}
$$

上記最適化問題 (P) に対応する当該期価値ハミルトン関数を，以下のように構築する。

$$
\begin{aligned}
&\tilde{H}(a(s,t),c_m(s,t),q(t))\\
&=\log c_m(s,t)+q(t)\\
&\{(1-\theta)[r(t)a(s,t)+w(s,t)]-c_m(s,t)\}.
\end{aligned}
$$

ただし，$q(t)$ は当該期価値ハミルトン関数の随伴変数である。

最適化の必要条件は以下（2-14)，(2-15）及び（2-16）で与えられる。

$$\text{(2-14)}\quad \frac{1}{c_m(s,t)}=q(t),$$

$$\text{(2-15)}\quad \dot{q}(t)=[\rho-(1-\theta)r(t)]q(t),$$

$$\text{(2-16)}\quad \lim_{v\to\infty}a(s,v)\exp\left(-(1-\theta)\int_t^v r(\mu)d\mu\right)=0.$$

上記のうち，(2-16) は N.P.G. 条件であるが，これは，以下で表わされる横断条件（2-17）と同値である（奈良［2008］参照)。

$$\text{(2-17)}\quad \lim_{v\to\infty}q(v)e^{-\rho v}a(s,v)=0.$$

また，(2-14) 及び (2-15) より，以下のオイラー方程式（2-18）を得る。

$$\text{(2-18)}\quad \frac{dc_m(s,t)}{dt}=[(1-\theta)r(t)-\rho]c_m(s,t).$$

定理 2-1　最適化問題 (P) に対する必要条件 (2-14)，(2-15) 及び (2-16)（あるいは (2-17)）は，最適化の十分条件でもある。つまり，(2-14)，(2-15）及び（2-16)（あるいは（2-17)）を満たす経路は，予算制約（2-13）を満たすいかなる他の経路に比較し，より大きな生涯効用をもたらすか，少なくとも同等の生涯効用をもたらす。

（証明）　付録 A を参照せよ。

定義 2-1　都市における s 期世代の家計の t 期における人的資産 (human wealth) を $h(s,t)$ とおくと，次の（2-19）のように生涯にわたって得る労働賃金の割引現在価値の合計として定義することができる。

$$\text{(2-19)}\quad h(s,t)=\int_t^{\infty}(1-\theta)w(s,v)\exp\left(-(1-\theta)\int_t^v r(\mu)d\mu\right)dv.$$

この定義 2-1 に関し，次の定理 2-2 を得る（証明については，奈良［2008］を参照せよ)。

定理 2-2　s 期世代の家計の t 期における合成財の消費水準 $c_m(s,t)$，非人的資産 $a(s,t)$ 及び人的資産 $h(s,t)$ との間に以下（2-20）が成立する。

$$\text{(2-20)}\quad c_m(s,t)=\rho[a(s,t)+h(s,t)].$$

(2)　集計

はじめに，既に定義した代表的家計の非人的資産 $a(s,t)$，人的資産 $h(s,t)$ 及び合成財の消費水準 $c_m(s,t)$ を，t 期において現存している世代全体で集計する。集計された変数とそれに相当する個別の変数との関係は以下のとおりである。

$$\text{(2-21a)}\quad A(t)=\int_{-\infty}^{t}a(s,t)ne^{ns}ds,$$

$$\text{(2-21b)}\quad H(t)=\int_{-\infty}^{t}h(s,t)ne^{ns}ds,$$

$$\text{(2-21c)}\quad C_m(t)=\int_{-\infty}^{t}c_m(s,t)ne^{ns}ds.$$

ところで，(2-20）を各時点の総人口で集計し，(2-21a)～(2-21c）を適用すると，以下（2-20′）が得られる。

$$\text{(2-20}'\text{)}\quad C_m(t)=\rho[A(t)+H(t)].$$

次に，(2-19)［定義 2-1］を (2-21b) に適用し，t 期に共存する全ての世代に労働所得を等しく

分配すると，つまり，$w(s,v)=w(v)$ とすると，以下を得る。

$$(2\text{-}22)\quad H(t)=N(t)\int_t^{\infty}(1-\theta)w(v)\exp\left(-(1-\theta)\int_t^{v}r(\mu)d\mu\right)dv.$$

(3)　動学体系の構築に向けて

はじめに，(2-22)を時間 t で微分すると，以下を得る。

$$(2\text{-}22)\quad \dot{H}(t)=[(1-\theta)r(t)+n]H(t)-(1-\theta)N(t)w(t).$$

次に，Leibnitz's Rule[2)]を適用しつつ集計された非人的資産 $A(t)$ に関する（2-21a）を時間 t で微分することにより，以下 (2-23) が成立する。

$$(2\text{-}23)\quad \dot{A}(t)=a(t,t)ne^{nt}+\int_{-\infty}^{t}\frac{da(s,t)}{dt}ne^{ns}ds.$$

ここで，世代間の利他的な動機に基づく遺贈が存在しない重複世代モデルの枠組みのもとでは $a(t,t)=0$ であること，また，(2-1) 及び (2-15) を考慮しつつ，(2-23)，(2-21a) 及び (2-21c) より，

$$(2\text{-}24)\quad \dot{A}(t)=(1-\theta)r(t)A(t)+(1-\theta)N(t)w(t)-C_m(t)$$

が導かれる。さらに，(2-20′) の両辺を時間 t で微分し，(2-22) 及び (2-24) を適用することにより，以下 (2-25) が得られる（奈良［2008］を参照せよ）。

$$(2\text{-}25)\quad \dot{C}_m(t)=[(1-\theta)r(t)+n-\rho]C_m(t)-\rho nA(t).$$

4.　市場均衡

(1)　労働市場

労働人口が総人口に等しい $N(t)$ であり，しかもこのモデルにおける産業は，合成財部門及び土地利用転換部門の2部門のみであるから，以下の労働市場の需給均衡式が成立する。

$$(2\text{-}26)\quad N_m(t)+N_b(t)=N(t).$$

この (2-26) の両辺を $N(t)$ で除すると，以下 (2-26′) が得られる。

$$(2\text{-}26')\quad n_m(t)+n_b(t)=1.$$

次に地域内の労働市場における裁定条件は，これら2部門における貨幣賃金率が等しくなること ($w(t)=w_m(t)=w_b(t)$) であるから，以下 (2-27) が成立する。

$$(2\text{-}27)\quad w(t)=\omega AL_m(t)^{z}n_m(t)^{\omega-1}K_m(t)N(t)^{-1}=Bp_b(t)G(t)N(t)^{-1}.$$

(2)　土地市場

いま，$L_v(t)$ を t 期における遊休地として，以下の土地市場における需給均衡式を得る。

$$(2\text{-}28)\quad L_m(t)+L_v(t)=L.$$

(3)　資産市場

はじめに，家計が保有する資産は民間資本，土地（産業用地及び遊休地）であるから，$q_L(t)$ を各用途共通の土地価格として，以下の資産市場の需給均衡式（2-29）が成立する。

$$(2\text{-}29)\quad A(t)=K_m(t)+q_L(t)L.$$

いま，民間資本は，合成財部門において生産され，その価格は1に基準化されているから，完全予見の仮定のもと，資産を民間資本として運用した場合と預金等で運用した場合の裁定条件は，それぞれの収益率が等しくなること，すな

---

2) Leibnitz's Rule とは，$g(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(s,t)ds$ とおくと，

$$g'(t)=f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f(s,t)}{\partial t}ds$$

が成立するという公式である（Kamien and Schwartz［1991］参照)。

わち，$r(t)=r_m(t)$ であるから，(2-6) により，以下 (2-30) で表わされる。

(2-30)　$r(t)=xAL_m(t)^z n_m(t)^\omega.$

また，資産を預金等で運用した場合と遊休地として運用した場合の裁定条件は，以下(2-31)で表わされる。

(2-31)　$r(t)=\dfrac{\dot{q}_L(t)}{q_L(t)}.$

また，資産を様々な用途の土地で運用した場合の裁定条件は，以下 (2-34) のように，効率単位で測った産業用地の地代 $\pi^*_m(t)=\pi_m(t)/K_m(t)$ が家計の負担する利用転換費用に等しくなることである。

(2-32)　$\pi^*_m(t)=p_b(t).$

(4)　政府部門

政府は，住民から徴収した所得税収をもって，公共投資に充当する。すなわち，

(2-33)　$\dot{G}(t)=\theta[r(t)A(t)+w(t)N(t)].$

(5)　財市場

公共投資も既存の資源を費消して行われることから，以下の財市場均衡式が得られる。

(2-34)　$Y_m(t)=C_m(t)+\dot{K}_m(t)+\dot{G}(t).$

III　動 学 体 系

1.　動学体系の構築に向けて

ここでは，本モデルにおける状態変数 $K_m(t)$ あるいは $q_L(t)$ 等を決定する微分方程式体系すなわち動学体系を導出する。

はじめに，(2-7) 及び (2-32) より，以下 (3-1) が得られる。

(3-1)　$p_b(t)=zAL_m(t)^{z-1}n_m(t)^\omega.$

$g(t)=G(t)/K_m(t)$ を考慮しつつ，(3-1)及び(2-27) より，$p_b(t)$ を消去して変形すると，

(3-2)　$n_m(t)=\dfrac{\omega}{zB}L_m(t)g(t)^{-1}$

が得られるが，この (3-2) 及び (2-10′) を，(2-26′) に適用すると，以下(3-3)のように，$L_m(t)$ が $g(t)$ の単調増加関数となる。すなわち，民間資本-社会資本比率が増大すれば土地の有効利用度が高まることがわかる。

(3-3)　$L_m(t)=\dfrac{zB}{\omega+z}g(t)\equiv L_m[g(t)].$

この (3-3) を (3-2) に適用することにより，$n_m(t)$ については，時点 t によらない一定値 n_m をとることがわかる。すなわち，

(3-4)　$n_m(t)=\dfrac{\omega}{\omega+z}\equiv n_m.$

また，この (3-4) より，地域 i における合成財部門に雇用される労働力の割合 $n_m(t)$ 及び土地利用転換サービス部門に雇用される労働力の割合 $n_b(t)$ はともに，時点 t によらず，毎期 0 と 1 との間に決定されることがわかる。

次に，(3-3) 及び (3-4) を (2-30) に適用することにより，市場利子率 $r(t)$ については，民間資本-社会資本比率 $g(t)$ のみの関数となることがわかる。すなわち，

(3-5)　$$r(t)=xA\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^\omega\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^z g(t)^z \equiv r[g(t)]$$

が成立する。

また，(3-3) 及び (3-4) を (2-7) 及び (2-8) に適用することにより，産業用地の地代 $\pi_m(t)$ 及び労働賃金の総計 $w(t)N(t)$ が，いずれも民間資本の水準 $K_m(t)$ の増加関数として表わされることがわかる。すなわち，

(3-6)　$$\pi_m(t)=zA\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^\omega\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^{z-1} K_m(t)g(t)^{z-1},$$

(3-7)　$$w(t)N(t)=\omega A\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{\omega-1}\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^z K_m(t)g(t)^z.$$

さらに，生産関数 (2-4′) は，(3-3) 及び (3-4) を適用することによって，以下 (3-8) のよ

うに書き換えることができる。

(3-8)　$Y_m(t)=A\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{\omega}\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^{z}K_m(t)g(t)^z\equiv\hat{A}g(t)^zK_m(t).$

ただし，

(3-9)　$\hat{A}=A\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{\omega}\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^{z}$

である。すなわち，合成財の生産水準 $Y_m(t)$ は，$L_m(t)$ 及び $n_m(t)$ が時間を通じて一定であることにより，民間資本-社会資本比率 $g(t)$ 及び民間資本の水準 K_m のみに依存して決まる。

2.　定常的成長均衡とその動学的安定性

(1)　定常的成長均衡

本論における定常的成長均衡は，生産水準 $Y_m(t)$，消費水準 $C_m(t)$，民間資本 $K_m(t)$，社会資本 $G(t)$ さらには土地価格 $q_L(t)$ が時間を通じて同一の率で成長するような均衡である。そこで，成長率を γ とおくと，(2-31) 及び (3-5) より γ は，以下（3-10）で与えられる。

(3-10)　$r[g(t)]=r[g(t)]=xA\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{\omega}\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^{z}g(t)^z(=x\hat{A}g(t)^z).$

(2)　動学的体系の構築

はじめに，$v(t)\equiv q_L(t)L/K_m(t)$ 及び $c(t)\equiv C_m(t)/K_m(t)$ とおくと，(2-33) の両辺を $K_m(t)$ で除することにより，(3-7) 及び (3-10) を考慮して以下を得る。

(3-11)　$g(t)\frac{\dot{G}(t)}{G(t)}=\theta\{x\hat{A}g(t)[1+v(t)]+(1-x)\hat{A}g(t)^z\}.$

次に，財市場の需給均衡式（2-34）に（3-8）及び（3-11）を適用し，両辺を $K_m(t)$ で除することにより，以下（3-12）が得られる。

(3-12)　$\frac{\dot{K}_m(t)}{K_m(t)}=\hat{A}g(t)^z-c(t)-\theta\{x\hat{A}g(t)[1+v(t)]+(1-x)\hat{A}g(t)^z\}.$

さらに，(2-29) を考慮しつつ，(2-25) の両辺を $K_m(t)$ で除すると，以下 (3-13) が得られる。

(3-13)　$c(t)\frac{\dot{C}_m(t)}{C_m(t)}=\{(1-\theta)x\hat{A}g(t)^z+n-\rho\}c(t)-n\rho[1+v(t)].$

最後に，(3-10) を考慮しつつ，(2-31) より，以下（3-14）を得る。

(3-14)　$\frac{\dot{q}_L(t)}{q_L(t)}=x\hat{A}g(t)^z.$

以上，(3-11)～(3-14) より，以下 (3-15)，(3-16) 及び (3-17) のような 3 状態変数 $c(t)$，$v(t)$ 及び $g(t)$ に関する完全な動学体系を導出することができる（奈良［2008］を参照せよ)。

(3-15)　$\dot{c}(t)=c(t)^2+\{-(1-\theta)(1-x)\hat{A}g(t)^z+\theta xv(t)\hat{A}g(t)^z+n-\rho\}c(t),-n\rho[1+v(t)]\equiv\Gamma[c(t),v(t),g(t)]$

(3-16)　$\dot{v}(t)=\{-(1-x)\hat{A}g(t)^z+c(t)+\theta[\hat{A}g(t)^z+xv(t)\hat{A}g(t)^z]\}v(t)\equiv\Lambda[c(t),v(t),g(t)],$

(3-17)　$\dot{g}(t)=\theta[1+g(t)][\hat{A}g(t)^z+xv(t)\hat{A}g(t)^z]+g(t)c(t)-\hat{A}g(t)^{z+1}\equiv\Omega[c(t),v(t),g(t)].$

(3)　定常的成長均衡の存在と一意性

定常的成長均衡においては，

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{\dot{v}(t)}{v(t)}=\frac{\dot{g}(t)}{g(t)}=0$$

が成立するから，c，v 及び g を，それぞれ定常状態における $c(t)$，$v(t)$ 及び $g(t)$ として，(3-15)，(3-16) 及び (3-17) より，以下 (3-18)，(3-19) 及び (3-20) が成立する。

(3-18)　$c^2+[-(1-\theta)(1-x)\hat{A}g^z+\theta xv\hat{A}g^z+n-\rho]c=n\rho(1+v),$

(3-19)　$(1-x)\hat{A}g^z=c+\theta(\hat{A}g^z+xv\hat{A}g^z),$

(3-20)　$$\hat{A}g^{z+1}=\theta(1+g)(\hat{A}g^{z}+xv\hat{A}g^{z})+gc.$$

これらより c，v を消去すると，以下(3-21)が導かれる。

(3-21)　$$[(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^{z}][(1-x)-xg]\hat{A}g^{z}=n\rho\frac{xg-\theta(1-x)}{\theta x}.$$

すなわち，(3-21)を解くと g が求められ，この結果を(3-18)～(3-20)に適用することで，c 及び v が求められる。

ところで，$c>0$，$v>0$ 及び $g>0$ が存在するための必要十分条件は，以下(3-22)及び(3-23)が満たされることである（奈良［2008］を参照せよ）。

(3-22)　$$\hat{A}g^{z}<\frac{n-\rho}{\theta x},$$

(3-23)　$$\frac{(1-x)\theta}{x}<g<\frac{1-x}{x}.$$

(4)　定常的成長均衡の動学的安定性

ここでは，定常的成長均衡が，均衡点の近傍には一意に存在することを示す。はじめに，(3-15)，(3-16) 及び (3-17) を，定常的成長均衡 (c, v, g) の近傍で線形近似することにより，以下 (3-27) のような定数係数連立線形微分方程式にまとめられる。

(3-24)　$$\begin{pmatrix}\dot{c}(t)\\ \dot{v}(t)\\ \dot{g}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma_c & \Gamma_v & \Gamma_g\\ \Lambda_c & \Lambda_v & \Lambda_g\\ \Omega_c & \Omega_v & \Omega_g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c(t)-c\\ v(t)-v\\ g(t)-g\end{pmatrix}.$$

ただし，Γ_c，Γ_v 及び Γ_g は，$\Gamma(c(t), v(t), g(t))$ をそれぞれ $c(t)$, $v(t)$ 及び $g(t)$ で偏微分し，均衡点 (c, v, g) で評価したものであり，以下 (3-25) で与えられる。

(3-25)　$$\Gamma_c=c+[(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^{z}],$$
$$\Gamma_v=-n\rho+\theta x\hat{A}g^{z}c,$$
$$\Gamma_g=-z\hat{A}g^{z-1}[(1-\theta)(1-x)-xg+\theta]c.$$

また，Λ_c, Λ_v 及び Λ_g は，$\Lambda(c(t), v(t), g(t))$ をそれぞれ $c(t)$, $v(t)$ 及び $g(t)$ で偏微分し，均衡点 (c, v, g) で評価したものであり，以下(3-26)で与えられる。

(3-26)　$$\Lambda_c=v,$$
$$\Lambda_v=\theta x\hat{A}g^{z}v,$$
$$\Lambda_g=-z\hat{A}g^{z-1}[(1-x)-xg]v.$$

さらに，Ω_c, Ω_v 及び Ω_g は，$\Omega(c(t), v(t), g(t))$ をそれぞれ $c(t)$, $v(t)$ 及び $g(t)$ で偏微分し，均衡点 (c, v, g) で評価したものであり，以下 (3-27) で与えられる。

(3-27)　$$\Omega_c=g,$$
$$\Omega_v=\theta x(1+g)\hat{A}g^{z},$$
$$\Omega_g=[xz(1+g)-(x+z)]\hat{A}g^{z}.$$

いま，定数係数連立線形微分方程式(3-24)の定数係数行列を，

$$M=\begin{pmatrix}\Gamma_c & \Gamma_v & \Gamma_g\\ \Lambda_c & \Lambda_v & \Lambda_g\\ \Omega_c & \Omega_v & \Omega_g\end{pmatrix}$$

とおき，M の行列式を $\det M$，対角要素の和を $\mathrm{tr}M$ とおくと，$\det M$，$\mathrm{tr}M$ は，それぞれ，以下 (3-28)，(3-29) で与えられる。

(3-28)　$$\det M=\theta xv\hat{A}g^{z}\cdot\hat{A}g^{z-1}\Big\{[(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^{z}][(1-x)z-x(1+z)g]-\frac{n\rho}{\theta\hat{A}g^{z-1}}-\theta xzc\Big\},$$

(3-29)　$$\mathrm{tr}M=(1-z)c+\frac{n\rho(1+v)}{c}+[(xg-\theta)-x]\hat{A}g^{z}.$$

補題 3-1　(3-28) で示した $\det M$ の符号につき，$\det M<0$ が成立する。また，(3-29)で示した $\mathrm{tr}M$ の符号につき，以下 (3-30) が成立する場合，$\mathrm{tr}M>0$ が成立する。

(3-30)　$$x<(1-x)(1-z),$$
$$\theta<\frac{(1-x)(1-z)-x}{1-z(1-x)}.$$

(証明)　補題の前半部分 ($\det M<0$) の証明は，付録 B を参照せよ。

補題の後半部分は，(3-29)に，(3-18)～(3-20)

を適用し，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}M&=(1-z)[(1-x)-xg]\hat{A}g^z+[(n-\rho)\\&\quad-\theta x\hat{A}g^z]+[(xg-\theta)-x]\hat{A}g^z\\&=zxg\hat{A}g^z+[(1-x)(1-z)-\theta-x\\&\quad-\theta x]\hat{A}g^z+(n-\rho)\\&>z(1-x)\theta+[(1-x)(1-z)-\theta-x-\theta x]\\&\quad\hat{A}g^z+\theta x\hat{A}g^z\\&=\{(1-x)(1-z)-x-\theta[1-z(1-x)]\}\hat{A}g^z\end{aligned}$$

が計算されることから明らかである。

（証明了）

定理3-2　税率 θ のとる範囲に関し，(3-30)が成立すれば，定常的成長均衡 (c, v, g) に収束する経路が (c, v, g) の近傍において一意に存在する。

（証明）　(3-30)が成立する場合，補題3-1によって $\det M<0$ 及び $\mathrm{tr}M>0$ が同時に成立するから，定数係数行列 M の特性方程式

$$\mu^3-\mathrm{tr}M\mu^2+(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)\mu-\det M=0$$

の特性根のうち1根のみが負であることがわかる。他方，状態変数 $c(t)$, $v(t)$ 及び $g(t)$ の初期値のうち先決変数は $g(t)$ のみであるから，負の特性根の数と先決変数の数とが一致し，定常的成長均衡に収束する解経路が一意に定まることがわかる（Buiter［1984］，奈良［2008］参照）。

（証明了）

IV　経済成長と社会的厚生

(1)　民間資本-社会資本比率と経済成長率

直前のIIIでは，3つの状態変数 $c(t)$, $v(t)$ 及び $g(t)$ に関する動学体系を導出し，定常的成長均衡 (c, v, g) の存在と一意性を示すとともに，(c, v, g) に収束する経路が一意に定まることを示した（定理3-2）。

ここに定常的成長均衡における民間資本-社会資本比率 g を求める式（3-21）を以下に改めて（4-1）として再掲する。

(4-1)
$$[(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^z][(1-x)-xg]\hat{A}g^z=n\rho\frac{xg-\theta(1-x)}{\theta x}.$$

また，定常的成長均衡に収束した後には，生産水準 $Y_m(t)$, 消費水準 $C_m(t)$, 民間資本 $K_m(t)$ 及び土地価格 $q_L(t)$，さらには社会資本 $G(t)$ が，時間を通じて以下（4-2）で表わされるような一定率 γ^* で成長することになる。

(4-2)
$$\gamma^*=r(g)=xA\left(\frac{\omega}{\omega+z}\right)^{\omega}\left(\frac{zB}{\omega+z}\right)^{z}g^z\quad(=x\hat{A}g^z).$$

さらに，生産的な用途に利用される土地の水準 $L_m(t)$ も以下（4-3）で表わされるように，定常的成長均衡に収束した後には一定の値をとる。

(4-3)
$$L_m=\frac{zB}{\omega+z}g=L_m(g).$$

(2)　経済成長と社会的厚生

ここでは，民間資本-社会資本比率 g を最大化し，なおかつ（4-2）で表わされる経済成長率 γ^* を最大化する税率 $\theta=\theta^*$ を解析的に求め，その経済学的な意味を解釈するとともに，生涯効用の観点から，$\theta=\theta^*$ が最適税率であるか，すなわち社会的厚生を最大化する税率であるか否かを検討する。

Phelps［1965］は，Solow［1956］の枠組み（外生的成長モデル）に基づいて分析を行い，市場利子率が経済成長率を下回る場合にはパレート効率的な資源配分が達成されないことを示したが，経済成長率が常に市場利子率に等しくなるような本モデルではいかなる結論が導出されるのであろうか？

ここに，(4-1)を税率 θ について全微分し，整理すると，以下が得られる。

(4-4)
$$\frac{dg}{d\theta}=\frac{v\hat{A}g^z}{\det M}\{x\cdot\theta x\hat{A}g^z c-n\rho(1+xv)\}.$$

$\det M<0$ であるから，$dg/d\theta=0$ を満たす $\theta=\theta^*$ は，以下（4-5）のようになる。

(4-5)　$\theta^{*}=\dfrac{n\rho(1+xv)}{x^{2}c\hat{A}g^{z}}.$

上記(4-5)で表わされる $\theta=\theta^{*}$ が，局所的には民間資本-社会資本比率 g を最大化していることは，以下のように示すことができる。すなわち，(4-4)の $dg/d\theta$ を再度，税率 θ で微分し，$\theta=\theta^{*}$ で評価すると，以下が計算される。

$$\left.\frac{d^{2}g}{d\theta^{2}}\right|_{\theta=\theta^{*}}=\frac{v\hat{A}g^{z}}{\det M}\cdot\frac{d}{d\theta}\{\theta x^{2}\hat{A}g^{z}c-n\rho(1+xv)\}$$
$$=\frac{v\hat{A}g^{z}}{\det M}\left[x^{2}\hat{A}g^{z}c+\theta x^{2}\hat{A}g^{z}\left.\frac{dc}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^{*}}-n\rho x\left.\frac{dv}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^{*}}\right]$$

しかるに，(3-19) 及び (3-20) より得られる $xg=\theta(1+xv)$ の両辺を，税率 θ で微分し，$\theta=\theta^{*}$ で評価すると，

$$\theta x\left.\frac{dv}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^{*}}=-(1+xv)$$

が成り立つこと，及び $xg=\theta(1+xv)$ と (3-19) より得られる $c=[(1-x)-xg]\hat{A}g^{z}$ の両辺を税率 θ で微分し，$\theta=\theta^{*}$ で評価すると，

$$\left.\frac{dc}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^{*}}=0$$

が成り立つことから，

$$\left.\frac{d^{2}g}{d\theta^{2}}\right|_{\theta=\theta^{*}}=\frac{v\hat{A}g^{z}}{\det M}\left[x^{2}\hat{A}g^{z}c+\frac{n\rho}{\theta}(1+xv)\right]<0$$

が得られる。

いま，(3-10)より，$r=x\hat{A}g^{z}$ が成り立つこと，また $xg=\theta(1+xv)$ より，$(1+xv)/x=g/\theta$ が得られること，さらには，c の定義を参照しつつ，(2-20′) より，(4-5) は，

(4-5′)　$\theta^{*}=\sqrt{\dfrac{nG(t)}{r[A(t)+H(t)]}}$

と書き換えることができる。すなわち，経済成長率を最大化する税率の二乗は，毎期の利子所得と人口増加に対応した社会資本の増加部分との比率に等しくなる。

次に，生涯効用を最大化する税率を $\theta=\theta^{**}$ とおき，$\theta=\theta^{*}$ と一致するかを，Futagami＝Morita＝Shibata と同様の方法で確かめる。生涯効用は，税率にも依存することから，(2-12) を次の (4-6) のように書き換えることとする。

(4-6)　$U(c_{m}(s,t,\theta))$
$$=\int_{t}^{\infty}\log c_{m}(s,v,\theta)e^{-\rho(v-t)}dv.$$

ここに，オイラー方程式 (2-18) より，(3-5) を考慮しつつ，

(4-7)　$c_{m}(s,t,\theta)=c_{m}(s,s,\theta)\exp$
$$\left[\int_{s}^{t}\{(1-\theta)r[g(\tau)]-\rho\}d\tau\right]$$

が導出される。上記 (4-7) を (4-6) に適用すると，

(4-8)　$U(c_{m}(s,t,\theta))=\dfrac{\log c_{m}(s,s,\theta)}{\rho}+e^{\rho t}$
$$\int_{t}^{\infty}\int_{s}^{t}\{(1-\theta)r[g(\tau)]-\rho\}d\tau e^{-\rho v}dv$$

が得られる。この (4-8) の両辺を税率 θ で微分することにより，

(4-9)　$\dfrac{dU(c_{m}(s,t,\theta))}{d\tau}=\dfrac{c_{m\theta}(s,s,\theta)}{\rho c_{m}(s,s,\theta)}+e^{\rho t}$
$$\int_{t}^{\infty}\int_{s}^{t}\left[(1-\theta)r'(g)\frac{dg(\tau)}{d\theta}-r(g)\right]d\tau\cdot e^{-\rho v}dv$$

が導かれる（付録 C 参照)。ただし，$c_{m\theta}(s,s,\theta)=dc_{m\theta}(s,s,\theta)/d\theta$ である。

ここで，民間資本-社会資本比率 $g(t)$ は，初期値 $g(0)$ が歴史的に所与であり，定理 3-2 で示したように，一意的な経路を通って定常的均衡値に収束するから，

(4-10)　$g(\tau)=g(1-e^{\mu_{1}\tau})+g(0)e^{\mu_{1}\tau},\ \mu_{1}<0$

が成立する。この (4-10) の両辺を税率 θ で微分することにより，以下を得る。

(4-11)　$\dfrac{dg(\tau)}{d\theta}=(1-e^{\mu_1\tau})\dfrac{dg}{d\theta}.$

この (4-11) を，$\left.\dfrac{dg}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^*}=0$ を考慮しつつ，(4-9）に適用すると，以下を得る。

(4-12)　$$\left.\frac{dU(c_m(s,t,\theta))}{d\theta}\right|_{\theta=\theta^*}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{c_{m\theta}(s,s,\theta)}{c_m(s,s,\theta)}-r(g)(t-s)\right].$$

上記（4-12）は，以下（4-13）が成立するような偶然によらなければ，最適税率が経済成長率を最大化する税率とは一致しないことを意味する[3)]。

(4-13)　$$r(g)=\frac{1}{t-s}\cdot\frac{c_{m\theta}(s,s,\theta)}{c_m(s,s,\theta)}.$$

V　結　　語

直前のIVまでにおいて行った一般均衡動学モデルによる分析と，分析結果を改めて記すと以下のようになる。すなわち，資本蓄積が集積効果として作用し，公共投資による社会資本の整備が土地利用転換を効率化する枠組みにおいて，あるパラメータの組み合わせと適切な初期値の設定のもとでは，民間資本，社会資本，消費水準及び地価がいずれも市場利子率に等しい値で成長するような定常的成長均衡に向かう経路に収束し，そこに止まる。そして，公共投資の財源としての所得税率がある値，すなわち毎期の利子所得と人口増加に対応した社会資本の増加部分との比率に等しくなる場合，民間資本—社会資本比率及び経済成長率とも最大化され，遊休地の割合が最小化される（有効利用されている土地の割合が最大化される）。

しかるに，経済成長率が最大化され，有効利用されている土地の割合が最大化されるような税率のもとで，必ずしも社会的厚生は最大化されるとは限らない。

本論においては，奈良[2007]及び奈良[2008]同様，閉鎖的な単一の都市が分析の対象となっているに過ぎないため，都市の公共投資の配分の変化が地域間の人口移動及び資本移動を通じて，地域の成長あるいは土地の有効利用度に及ぼす影響を分析することが不可能である。この点，近藤［2003]，及び Bröcker［2004］においては，2つの地域間の公的支出の配分変化がそれぞれの地域の経済成長及び社会的厚生に及ぼす影響が分析されている。したがって，近藤及び Bröcker はもとより，Fujita and Thisse [2003]同様，人口，資本の両方が地域の境界を超えて移動するような開放体系に拡張して分析することを今後の課題とする。

付　　録

A.　定理 2-1 の証明

終端時点を T とし，最適化の必要条件（2-14)，(2-15) 及び (2-16)（あるいは (2-17)）を満たす消費の経路を $\{c^*_m(s,v)\}^T_t$ とおく。いま，Benveniste＝Scheinkman [1982] 同様，効用関数 $u(c_m(s,v))=\log c_m(s,v)$ は凹関数であるから，予算制約 (2-13) を満たす任意の経路 $\{c_m(s,v)\}^T_t$ について，

(a-1)　$$\log c^*_m(s,v)e^{-\rho(v-t)}-\log c_m(s,v)e^{-\rho(v-t)} \geq u'(c^*_m(s,v))[c^*_m(s,v)-c_m(s,v)]^{e-\rho(v-t)}$$

が成立する。ここで，(2-14) より，$u'(c^*_m(s,v))=1/c^*_m(s,v)=q(v)$ が成立することを考慮すると，(a-1)の両辺を，区間 $[t,T]$ で積分して，以下（a-1′）を得る。

3)　Futagami＝Morita＝Shibata においては，税率が変更することによって生じる新たな定常的成長均衡に収束する経路に乗るために，家計が消費水準の初期値をどのように選びなおすかを，位相図を用いて把握し，経済成長率を最大化する税率は，生涯効用を最大化する税率よりも高いことを結論づけている。

(a-1′)
$$\int_t^T \log c_m^*(s,v)e^{-\rho(v-t)}dv - \int_t^T \log c_m(s,v)e^{-\rho(v-t)}dv \geqq \int_t^T q(v)[c_m^*(s,v)-c_m(s,v)] e^{-\rho(v-t)}dv.$$

ところで，$\{c_m^*(s,v)\}_t^T$ 及び $\{c_m(s,v)\}_t^T$ は，いずれも予算制約式（2-13）を満たすから，(a-1′）右辺は，以下のように変形することができる。

(a-2)
$$\int_t^T q(v)[c_m^*(s,v)-c_m(s,v)]e^{-\rho(v-t)}dv = e^{\rho t}\int_t^T q(v)\Big\{(1-\theta)r(v)[a^*(s,v) - a(s,v)] - \Big[\frac{da^*(s,v)}{dv}-\frac{da(s,v)}{dv}\Big]\Big\}e^{-\rho v}dv$$

ただし，$\{a^*(s,v)\}_t^T$ 及び $\{a(s,v)\}_t^T$ は，それぞれ最適化の必要条件を満たす資産の経路及び予算制約を満たす他の経路である。さらに，(a-2)右辺は，(2-15)を考慮しつつ，以下のように変形することができる。

$$e^{\rho t}\int_t^T q(v)\Big\{(1-\theta)r(v)[a^*(s,v)-a(s,v)] - \Big[\frac{da^*(s,v)}{dv}-\frac{da(s,v)}{dv}\Big]\Big\}e^{-\rho v}dv$$
$$= e^{\rho t}\int_t^T q(v)\Big\{\rho[a^*(s,v)-a(s,v)] + [(1-\theta)r(v)-\rho][a^*(s,v)-a(s,v)] - \Big[\frac{da^*(s,v)}{dv}-\frac{da(s,v)}{dv}\Big]\Big\}e^{-\rho v}dv$$
$$= e^{\rho t}\int_t^T \Big\{\rho[a^*(s,v)-a(s,v)]q(v)-\dot{q}(v) [a^*(s,v)-a(s,v)]-q(v) \Big[\frac{da^*(s,v)}{dv}-\frac{da(s,v)}{dv}\Big]\Big\}e^{-\rho v}dv$$
$$= e^{\rho t}\int_t^T \{\rho[a^*(s,v)-a(s,v)]q(v)\}e^{-\rho v}dv - e^{\rho t}\int_t^T -e^{-\rho v}\frac{d}{dv}\{q(v)[a^*(s,v)-a(s,v)]\}dv$$

部分積分の公式により，

$$\int_t^T e^{-\rho v}\frac{d}{dv}\{q(v)[a^*(s,v)-a(s,v)]\}dv = [e^{-\rho v}q(v)\{a^*(s,v)-a(s,v)\}]_t^T + \rho\int_t^T e^{-\rho v}q(v)[a^*(s,v)-a(s,v)]dv$$

が成立すること，及び計画期間の資産の初期値の満たすべき条件 $(a^*(s,t)=a(s,t))$ により，(b-2）右辺は，結局，以下のように書き換えることができる。

$$e^{\rho t}\int_t^T q(v)\Big\{(1-\theta)r(v)[a^*(s,v)-a(s,v)] - \Big[\frac{da^*(s,v)}{dv}-\frac{da(s,v)}{dv}\Big]\Big\}e^{-\rho v}dv$$
$$= -e^{\rho t}[e^{-\rho v}q(v)\{a^*(s,v)-a(s,v)\}]_t^T$$
$$= -e^{\rho t}[e^{-\rho T}q(T)\{a^*(s,T)-a(s,T)\} - e^{\rho t}q(t)\{a^*(s,t)-a(s,t)\}]$$
$$= e^{-\rho(T-t)}q(T)\{a(s,T)-a^*(s,T)\}$$

しかるに，終端時点 T の極限をとると $(T\to\infty)$，経路 $\{a^*(s,v)\}_t^T$ が横断条件 (2-17) を満たすこと等を考慮して，

$$\lim_{T\to\infty} e^{-\rho(T-t)}q(T)\{a(s,T)-a^*(s,T)\}$$
$$= e^{\rho t}\lim_{T\to\infty}[q(T)e^{-\rho T}a(s,T) - q(T)e^{-\rho T}a^*(s,T)]$$
$$= e^{\rho t}\lim_{T\to\infty} q(T)e^{-\rho T}a(s,T) \geqq 0$$

が成立する。上記における不等号は，あらゆる時点 v において，$q(v)=1/c_m(s,v)\geqq 0$ 及び，$a(s,v)\geqq 0$ が成立するからである。

以上の議論により，

(a-3)
$$\int_t^\infty \log c_m^*(s,v)e^{-\rho(v-t)}dv$$

$$\geqq \int_t^\infty \log c_m(s,v)e^{-\rho(v-t)}dv$$

が成立することがわかるが，この（a-3）より，定理がただちにしたがう。（証明了）

B.　補題3-1前半部分（$\det M<0$）の証明

（3-28）は，

$$\begin{aligned}\det M=&xv\hat{A}g^z\{[(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^z]\\&[z(1-x-xg)-xg]\theta\hat{A}g^{z-1}\\&-n\rho-\theta xzc\cdot\theta\hat{A}g^{z-1}\}\\=&xv\hat{A}g^z\{\theta\hat{A}g^{z-1}[(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^z]\\&\cdot z(1-x-xg)-\theta x\hat{A}g^z\\&[(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^z]\\&-n\rho-\theta zc\cdot\theta x\hat{A}g^{z-1}\}\end{aligned}$$

となるが，（3-19）及び（3-20）より得られる $(1+x)-xg=C/\hat{A}g^z$ を適用すると，

$$\begin{aligned}\det M=&xv\hat{A}g^{z-1}\{\theta zc[(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^z]\\&-\theta x\hat{A}g^z[(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^z]g\\&-n\rho g-\theta zc\cdot\theta x\hat{A}g^z\}\end{aligned}$$

と表わすことができる。ここで，$k\equiv\theta x\hat{A}g^z$ とおくと，$\det M$ の符号は，

$$\begin{aligned}\phi(k)\equiv&gk^2-[(n-\rho)g+2\theta zc]k\\&+\theta zc(n-\rho)-n\rho g\end{aligned}$$

の符号に一致する。しかるに，（3-18）及び（3-19）より，$(n-\rho)c=n\rho(1+v)+kc$ が成立することから，以下（b-1）が導かれる。

（b-1）
$$\begin{aligned}\phi(k)\equiv&gk^2-[(n-\rho)g+\theta zc]k\\&+n\rho[\theta z(1+v)-g].\end{aligned}$$

さらに，（3-19）及び（3-20）より得られる $g=\dfrac{\theta}{x}(1+xv)$ を（c-1）に適用し，

$$\begin{aligned}\phi(k)=&\frac{\theta}{x}(1+xv)k^2-\Big[(n-\rho)\frac{\theta}{x}(1+xv)\\&+\theta zc\Big]k-\frac{\theta}{x}[(1-xz)+xv(1-z)]\\=&\frac{\theta}{x}(1+xv)k[k-(n-\rho)]-\theta zck\\&-\frac{\theta}{x}[(1-xz)+xv(1-z)]\end{aligned}$$

が導かれるが，（3-18）及び（3-19）より得られる，$[(n-\rho)-\theta x\hat{A}g^z]c=n\rho(1+v)$ より $k<n-\rho$ が成立することを考慮すると，$\phi(k)<0$，すなわち $\det M<0$ がしたがう。

C.　（4-9）の導出

はじめに，$r[g(\tau)]$ を $g(\tau)=g$ の近傍で線形近似すると，

$$r[g(\tau)]=r(g)+r'(g)(g(\tau)-g)$$

であるから，（4-8）に適用して，

（c-1）
$$\begin{aligned}U(c_m(s,t,\theta))=&\frac{\log c_m(s,s,\theta)}{\rho}\\&+e^{\rho t}\int_t^\infty\int_s^t\{(1-\theta)[r(g)+r'(g)\\&(g(\tau)-g)]-\rho\}d\tau e^{-\rho v}dv\end{aligned}$$

が得られる。いま，

$$\Phi(\theta)=(1-\theta)[r(g)+r'(g)(g(\tau)-g)]-\rho$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\Phi'(\theta)=&-r(g)-r'(g)(g(\tau)-g)+(1-\theta)\\&\left\{r'(g)\frac{dg}{d\theta}+r''(g)(g(\tau)-g)\frac{dg}{d\theta}+r'(g)\right.\\&\left.\left(\frac{dg(\tau)}{d\theta}-\frac{dg}{d\theta}\right)\right\}\end{aligned}$$

が計算される。しかるに，$\Phi'(\theta)$ を $g(\tau)=g$ で評価すると，以下（c-2）を得る。

（c-2）　$\Phi'(\theta)=-r(g)+(1-\theta)r'(g)\dfrac{dg(\tau)}{d\theta}$

を得る。この（c-2）を考慮しつつ，（c-1）の両辺を税率 θ で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{dU(c_m(s,t,\theta))}{d\tau}=&\frac{dc_m(s,s,\theta)/d\theta}{\rho c_m(s,s,\theta)}\\&+e^{\rho t}\int_t^\infty\int_s^t\Big[(1-\theta)r'(g)\frac{dg(\tau)}{d\theta}\\&-r(g)\Big]d\tau\cdot e^{-\rho v}dv\end{aligned}$$

が導かれるが，これより，ただちに (4-9) がしたがう。

参 考 文 献

［1］ Arrow, K.J. [1962], "The Economic Implications of Learning by Doing," *Review of Economic Studies* 29, 155-173.

［2］ Barro, R.J. [1990], "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth," *Journal of Political Economy* 98, s 103-s 125.

［3］ Benveniste, L.M. and Scheinkman, J.A. [1982], "Duality Theory for Dynamic Optimization Model of Economics : The Continuous Time Case," *Journal of Economic Theory* 27, 1-19.

［4］ Bröcker, J. [2004], "Agglomeration and Knowledge Diffusion," Economics Working Paper, Christian-Albrechts-Universität Kiel.

［5］ Buiter, W.H. [1984], "Saddlepoint Problems in Continuous Time Rational Expectations Models : A General Method and Some Expectatious Macroeconomic Examples," *Econometrica* 52, 665-680.

［6］ Fujita, M. and Thisse, J.F. [2003], "Does Agglomeration Foster Econiomic Growth ? And Who Gains and Loses from It ?," *The Japanese Economic Review* 54, 121-145.

［7］ Futagami, K., Morita, Y. and Shibata, A. [1993], "Dynamic Analysis of an Endogenous Growth Model with Public Capital," *Scandinavian Journal of Economics* 95, 607-625.

［8］ Futagami, K. and Shibata, A. [2000], "Growth Effects of Bubbles in an Endogenous Growth Model," *The Japanese Economic Review* 51, 221-235.

［9］ Greiner, A. and Hanusch, H. [1998], "Growth and Welfare Effects of Fiscal Policy in an Endogenous Growth Model with Public Investment," *International Tax and Public Finance* 5, 249-261.

[10] Kamien, M.I. and Schwartz, N.L. [1991], *Dynamic Optimization*, North-Holland.

[11] 近藤広紀 [2003]，「空間集積を伴う内生的成長モデルにおける公共投資の最適規模と地域間配分の分析」，ESRI Discussion Paper Series，内閣府経済社会総合研究所.

[12] Lucas, R.E. Jr. [1988], "On The Mechanics of Economic Development," *Journal of Monetary Economics* 22, 3-42.

[13] Monteiro, G. and Turnovsky, S.J. [2008], "The Composition of Productive Government Expenditure : Consequence for Economic Growth and Welfare," *Indian Growth and Development Review* 1, 57-83.

[14] 内閣府経済社会総合研究所編 [2008]，『国民経済計算年報平成 20 年版』，メディアランド.

[15] 奈良　卓 [2007]，「集積の経済と都市の成長―Weil 型重複世代モデルを用いた分析―」，『八戸大学紀要』34, 33-51.

[16] 奈良　卓 [2008]，「集積の経済と都市の成長―公共投資と土地の有効利用―」，『八戸大学紀要』36, 39-58.

[17] Phelps, E.S. [1965], "Second Essey on the Golden Rule of Accumulation," *American Economic Review* 55, 793-814.

[18] Rabenau, B. [1979], "Urban Growth with Agglomeration Economies and Diseconomies," *Geographia Polonica* 42, 77-90.

[19] Romer, P.M. [1986], "Increasing Returns and Long-Run Growth," *Journal of Political Economy* 94, 1002-1037.

[20] Solow, R.M. [1956], "A Contribution to theTheory of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics* 70, 65-94.

[21] Weil, P. [1989], "Overlapping Families of Infitely-Lived Agents," *Journal of Public Economics* 38, 183-198.