社会資本が経済成長と土地利用に及ぼす影響
―二地域動学モデルへの拡張―

奈良　卓

要旨
土地が遊休地を含む複数の用途に供され、所得税を財源として整備される社会資本がその技術的外部効果を通じて持続的経済成長の原動力となる奈良[2019]の枠組みを二地域動学モデルに拡張し、家計や社会資本の地域間分布のあり方を分析した結果、2つの地域に均等に分布する対称定常均衡解に加え、2つの地域に不均等に分布する非対称定常均衡が、分住均衡として存在し得ることがわかった。
このうち対称定常均衡解に着目し、社会資本整備の財源である所得税率の変更が経済成長率や土地の用途選択に及ぼす影響に関する比較静学分析を行った結果、ある特定の税率のもと経済成長率が最大化される一方、土地有効利用度はかかる税率のもと最小化されるとする結論が導かれた。

キーワード：二地域動学モデル、社会資本、持続的経済成長、土地の有効利用、遊休地

Ⅰ　はじめに

国及び地域において生活や生産の基盤としての土地が果たす役割は、無視できないほど大きいという認識のもと、奈良[2019]では Blanchard[1965]型の連続型重複世代モデル（Continuous-Time Overlapping Generations Model）のもと、野口[1985]の発想に立脚しつつ、産業用、遊休地と複数に及ぶ土地の用途が、各時点での資産選択によって決定される枠組みを構築し、かつ簡単化のため、経済・社会が単一の国または地域によって構成される閉鎖経済を想定し、生産活動に資する社会資本を建設するための財源としての所得税率の変更が、土地の有効利用度（すべての土地に占める産業用に使用される土地の割合）にいかなる影響を及ぼすかを考察、分析した。

同時に奈良[2019]では、Futagami,Morita and Shibata[1993]の発想に基づき、社会資本がもたらす技術的外部効果により、生産要素としての労働、実物資本、土地の生産性を高めることを通じ、持続的な成長を可能とする枠組みを導入したことにより、所得税率の変更がモデルの中で内生的に決定される経済成長率にいかなる影響が及ぼすかを併せて分析することが可能となった。

本論は、奈良[2019]を、経済・社会が異なる2つの地域によって構成され、ヒト（家計）、モノ（財）、カネ（土地等の資産）が地域間を移動することが可能な二地域モデルに拡張し、奈良[2019]と同様、社会資本整備の財源としての所得税率の変更が、土地の用途選択、土地の有効利用度、経済成長率にいかなる影響を及ぼすかを分析することである。

経済活動に Dixit-Stiglitz[1977]の独占的競争に基づく多様性選好の視点を導入し、異なる2つの地域において生産された多種多様な財（多様財）を地域間で輸送する際、一定のコストを要する仮定のもと、地域ごとの経済活動と地域間の取引と家計による居住地の選択行動を通じ、特定の地域に人や企業が集中する要因を解明することにより、「新経済地理学」（Economic Geography）を切り開いた Krugman[1991]に二地域モデルの源流を求めることができる。

上記 Krugman[1991]が想定した近視眼的視点、すなわち、各家計が居住地を選択する際、当該時点の地域間の実質賃金の差を意思決定の基準としていた点を改め、移住が生涯にわたってもたらす便益とコストを考慮する長期的視点を組み入れ、本格的な動学モデルに拡張した先行研究として、Baldwin[2001]及び Ottaviano[2001]を挙げることができる。

上記のうち Baldwin が、多様財の生産に関わるすべての家計が地域間を移住できるという仮定のもと、移住コストの大小が地域間の人口分布に影響を及ぼすことを結論付けたのに対し、Ottaviano は、多様財の生産に関わる経営層のみが地域間を移住できるという仮定に立脚し、財の輸送コストの大小が地域間の人口分布に影響を及ぼすことを結論付けた。

Ito[2010]は、生産活動に資する知識の蓄え（the knowledge base）が、部分的に他地域に波及する想定のもと、Cobb-Douglas 型生産関数に基づく単一の財の生産が各地域でなされ、消費の対象となり、Ottaviano と同様、すべての家計が地域間を移住可能とする二地域モデルを構築し、移住の障壁に該当する外生変数が、地域間の人口分布のあり方や当該分布に収束するプロセスに影響を及ぼすこと等を結論付けた。

上記の先行研究に対し、奈良[2016]は、Ito と同様、Cobb-Douglas 型生産関数に基づき、単一の財を生産する前提に立脚しつつ、奈良[2019]と同様、社会資本が技術的外部効果をもたらす枠組みのもと、2 つの地域それぞれで生産された財が輸送コストを伴い、地域間で取引されるとともに、地域間の家計の移住や土地等の資産の取引がコストを要しない前提のもと、社会資本整備の財源としての所得税率の変更が、2 地域それぞれにおける土地の用途選択、有効利用度、経済成長率及び地域間人口分布に及ぼす影響を分析した。

奈良[2016]の難点は、Diamond[1965]型の世代モデルのもと、離散時間を想定していたがゆえにあつかいが困難な差分方程式を用いて分析を行わざるを得ないのみならず、財の輸送に専業する部門を想定したが故に、モデルの構造と展開が煩雑に過ぎた点である。

また、直前で述べた地域間の家計の移住が、コストを伴わず自由になされるという非現実的な仮定に立脚していた点も、奈良[2016]の改善すべき課題として露呈した。

本論は、財の性質や生産技術については、生産要素としての実物資本を除外する点等において奈良[2019]を簡略化しつつ踏襲する一方、財の輸送については氷塊（ice berg）型輸送の枠組みを想定し、家計による居住地の選択については Baldwin,Ottaviano,Ito と同様、長期的な視点に基づくことを想定し、かつ数学的にあつかいやすい Blanchard[1965]型連続型世代モデルに立脚することにより、奈良[2016]の改善を試みる。

本論における次章以下の構成は以下のとおりである。次のⅡでは、モデルの概要を説明する。Ⅲでは、地域間の資産移動と家計の移住に関するルールを提示し、これらに基づき、モデルを、複数の微分方程式によって構成される体系に集約する。併せて、本論における長期的な均衡（定常的成長均衡）を定義し、そのもとでの地域間の人口分布（分住均衡）のあり方を考察する。

具体的に、本論では、2 つの地域に人口が均等に分布する対称定常均衡に加え、片方の地域により多くの人口と社会資本が分布する非対称定常均衡が存在する一方、一方の地域のみにすべての人口と社会資本が集積する中心・定常成長均衡は存在しえないことを示す。

Ⅳでは、Ⅲで提示した分住均衡のうち、対称定常均衡に限定し、所得税率の変更が経済成長率、土地の利用選択、ひいては土地の有効利用度に与える影響を、比較静学分析により、考察する。

最後のⅤでは、本論で得られた分析結果を整理し、今後の課題を述べる。

Ⅱ　モデル

１．地域と人口分布と生命保険の導入

経済・社会が二つの地域（地域i及びj）によって構成されている状況を想定し、各地域の人口動態（demography）は、Blanchard 型の連続型重複世代モデル（Continuous-Time Overlapping Generations Model）の枠組みに従うこととする。Blanchard[1985]は、各人が年齢に関らず一定の確率で死ぬという仮定をおくことにより、期待平均寿命は生涯を通して変わらず、マクロの集計を容易ならしめた。人口動態的な問題を議論するに際し、次の仮定 2-1 を前提とする。

仮定 2-1

①各人の寿命がx以上である確率を、$P(X \geq x)$とすると、次のように表される。

$$P(X \geq x) = e^{-px}, 0 < p < 1.$$

②出生率は$0 < b < 1$である。

奈良[2019]における補題 2-1 及び 2-2 で展開したと同様、仮定 2-1 により、二つの地域（地域i及びj）における各個人の単位期間あたり死亡確率は、年齢によらず一定値pであり、人口成長率は、$n = b - p > 0$である。つまり、時点tにおける社会全体の人口を$N(t)$とおくと、

(2-1) $\dot{N}(t) / N(t) = n.$

また、奈良[2019] における補題 2-3 及び定理 2-4 で示したと同様、$N(s,t)$を時点sに生まれた世代の時点tにおける人口とすると、

(2-2) $N(s,t) = N(0)e^{ns}be^{-p(t-s)}$

であり、$N(s,t)$をすべての世代で集計すると、時点tにおける総人口$N(t)$を得る。

ここに、私的な生命保険の市場が存在し、生命保険会社が次のようなサービスを提供するものとする。つまり、各人は、生前に配当を受ける見返りに、その死に際して、すべての資産を生命保険会社に譲渡することを契約する。

このとき、奈良[2019]における定理 2-5 で示したように、生前、$a(t)$の資産を保有する各人が生命保険会社から受け取る配当は$pa(t)$である。

以上により、$N_i(t)$及び$N_j(t)$を、それぞれ、時点tにおける地域i及びjの人口とすると、

(2-3) $N_i(t) + N_j(t) = N(t)$.

また、全人口のうち地域i及びjに居住する人口の割合をそれぞれ$n_i(t)$及び$n_j(t)$とおくと、(2-3)の両辺を$N(t)$で除し、

(2-3') $n_i(t) + n_j(t) = 1$.

２．企業の行動

完全競争の仮定のもと、生産活動を行う部門として、消費財部門、土地利用転換サービス部門を想定し、家計は、毎期 1 単位の労働力を、居住地域内のいずれかの部門から選択し、供給する。

ただし、両地域とも、労働人口は家計数（人口）に等しいことを仮定する。

（1）消費財部門

両地域とも消費財部門は日常生活に必要なあらゆる財の生産を行うが、生産技術については、奈良[2019]を簡略化し、実物資本を省き、社会資本を無償で利用しつつも、土地と労働のみを投入することを仮定する。第t期における地域iの代表的企業の生産水準を$y_{mi}(t)$とし、また、消費財部門の生産活動に使用される土地（以下、産業用地）及び労働力をそれぞれ$l_{mi}(t), n_{mi}(t)$とし、

(2-4) $y_{mi}(t) = F(l_{mi}(t), n_{mi}(t), G_i(t)) = Al_{mi}(t)^x n_{mi}(t)^{1-x} G_i(t)^\lambda N_i(t)^{-\varepsilon}, 0 < x < 1, \lambda > 0, \varepsilon > 0$

のような Cobb-Douglas 型の生産関数を想定するが、$G_i(t)^\lambda, N_i(t)^{-\varepsilon}$ それぞれ、社会資本を無償で利用する正の技術的外部効果、人口密集による負の技術的外部効果を表す。

ここに、$Y_{mi}(t), L_{mi}(t), N_{mi}(t)$を、それぞれ地域$i$における消費財の生産量、産業用地及び労働力の水準とおき、両地域とも企業規模が労働人口に等しいことを仮定すると、以下が成立する。

(2-5) $Y_{mi}(t) = N_i(t) y_{mi}(t)$, $L_{mi}(t) = N_i(t) l_{mi}(t)$, $N_{mi}(t) = N_i(t) n_m(t)$.

いま$\lambda = 1, \varepsilon = 1 - x$とおくと、生産関数(2-4)は、次の(2-4')のように書き換えられる。

(2-4') $Y_{mi}(t) = AL_{mi}(t)^x N_{mi}(t)^{1-x} G_i(t) N_i(t)^{-(1-x)} = A[G_i(t) L_{mi}(t)]^x [G_i(t) n_{mi}(t)]^{1-x}$.

上記$G_i(t)L_{mi}(t)$及び$G_i(t)n_{mi}(t)$はそれぞれ、効率単位で測った産業用地と労働力と見なせる。

次に、地域iにおいて生産される消費財（第１財）を価値基準材（numeraire）と見なす、すなわち第１財の価格を１に設定し、地域jにおいて生産される消費財（第２財）の価格を$p_2(t)$とする。さらに、$\pi_{mi}(t), w_{mi}(t)$を、それぞれ、地域iの地代、消費財部門の名目労働賃金率とし、$\pi_{mj}(t), w_{mj}(t)$を、地域jのそれらに設定すると、両地域の消費財部門の利潤最大化行動により、

(2-6) $\pi_{mi}(t) = xA[L_{mi}(t) / n_{mi}(t)]^{x-1} G_i(t), \pi_{mj}(t) = p_2(t) xA[L_{mj}(t) / n_{mj}(t)]^{x-1} G_j(t),$

(2-7a) $w_{mi}(t) = (1-x) A[L_{mi}(t) / n_{mi}(t)]^x G_i(t) N_i(t)^{-1},$

(2-7b) $w_{mj}(t) = p_2(t)(1-x) A[L_{mj}(t) / n_{mj}(t)]^x G_j(t) N_j(t)^{-1}.$

（２）土地利用転換サービス部門

土地の用途選択はその時点の土地所有者によって行われることから、各期において売却の対象となる生産的土地（産業用地及び住宅地）については、更地へ利用転換される。そこで、土地の利用転換に専業する部門たる土地利用転換サービス部門の存在を仮定する。土地利用転換に従事する生産要素は労働力であるが、ストックとしての社会資本を無償で利用できるものとする。

いま、第t期に提供される土地利用転換サービスの総量を$Y_{bi}(t)$，投入される労働力を$N_{bi}(t)$とし、また、土地を利用転換するに際して利用可能な社会資本ストックの水準を$G_i(t)$として、次に示すような簡単な生産関数を仮定する。

(2-8) $Y_{bi}(t) = BN_{bi}(t)G_i(t)N_i(t)^{-1}, B > 0$.

つまり、社会資本ストックは同一地域における土地利用転換サービスに正の技術的外部効果を、当該地域に居住する人口は負の技術的外部効果を、それぞれ及ぼす。

ここに、利用転換の対象となる土地（住宅用地及び産業用地）ごとのサービスの投入水準につき、以下の仮定をおく。

仮定 2-2　両地域において、1 単位の土地を利用転換するために投入するサービスの水準は、土地の用途に応じて異なるが、地域間で共通であるものとする。具体的に、以下のとおりである。
①住宅用地の利用転換：効率単位で測った用地 1 単位当たりα単位の利用転換サービスを投入。
②産業用地の利用転換：効率単位で測った用地 1 単位当たりβ単位の利用転換サービスを投入。
（ただし、$\alpha < \beta$。）

また、$K_i(t)$を地域iにおける物理単位で測った住宅用地の水準、$K_i^*(t)$を効率単位で測ったそれとおく。また、効率単位で測った地域iにおける産業用地の水準を$L_{mi}^*(t)$とおく。

このとき、両地域とも、各期における死亡率がpであることから、仮定 2-2 により、

(2-9) $Y_{bi}(t) = p[\alpha K_i^*(t) + \beta L_{mi}^*(t)], K_i^*(t) = G_i(t)K_i(t), L_{mi}^*(t) = G_i(t)L_{mi}(t)$.

以上(2-8),(2-9)より地域i及びjにおける土地利用転換サービスに投入される労働力の割合は、

(2-10a) $n_{bi}(t) = \dfrac{p}{B}[\alpha K_i(t) + \beta L_{mi}(t)], n_{bi}(t) \equiv \dfrac{N_{bi}(t)}{N_i(t)},$

(2-10b) $n_{bj}(t) = \dfrac{p}{B}[\alpha K_j(t) + \beta L_{mj}(t)], n_{bj}(t) \equiv \dfrac{N_{bj}(t)}{N_j(t)}.$

地域i及びjにおける土地利用転換サービス部門による利潤最大化により、効率単位当たり土地利用転換サービス 1 単位の価格$p_{bi}(t), p_{bj}(t)$，名目賃金を$w_{bi}(t), w_{bj}(t)$のもと、サービス生産水準が正になるような完全競争均衡は、

(2-11) $w_{bi}(t) = Bp_{bi}(t)G_i(t)N_i(t)^{-1}, w_{bj}(t) = Bp_{bj}(t)G_j(t)N_j(t)^{-1}.$

（3）財の輸送

消費財は、財 1、財 2 の 2 種類あるが、地域iにおいては財 1 のみが、地域jにおいては財 2 のみが、それぞれ生産される点については先述したとおりである。

ゆえに、財 1 は地域iから地域jへ、財 2 は地域jから地域iへ、それぞれ移出されるが、その際の輸送コストとして、氷塊（ice berg）型のそれを想定する。

具体的に、両地域とも他地域向けに 1 単位の財を生産し、輸送しても、現地に到着するのは$1/\Gamma$のみであること、ゆえに、輸送先の地域で1単位の財を消費するには、両地域ともΓ単位の財を生産しなければならないことを仮定する（$\Gamma>1$）。

3．家計の行動

（1）効用関数

1）1 時点における効用最大化

a.効用関数

地域iにおけるs期生まれの家計のt期における自地域産の財（財 1）及び他地域産の財（財 2）の合成された消費水準を$Q_i(s,t)$とおき、効率単位で測った住宅地が生み出すサービスの水準を$k_i^*(s,t)$とおく。このとき、t期における家計の効用関数は、

$$(2\text{-}12)\ U_i(Q_i(s,t),k_i^*(s,t))=\frac{Q_i(s,t)^{\mu}k_i^*(s,t)^{1-\mu}}{\mu^{\mu}(1-\mu)^{1-\mu}},0<\mu<1.$$

ただし、

$$(2\text{-}13)\ Q_i(s,t)=\left[c_{i1}(s,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+c_{i2}(s,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},\sigma>1.$$

上記(2-13)における$c_{i1}(s,t)$は地域iにおける家計が消費する財 1（自地域産の財）であり、$c_{i2}(s,t)$は地域iにおける家計が消費する財 2（他地域産の財）の水準である。

また、物理単位で測った住宅地が生み出す住宅サービスの水準を$k_i(s,t)$とおくと、$k_i^*(s,t)$との間に、以下の関係が成り立っている。

$$(2\text{-}14)\ k_i^*(s,t)=G_i(t)k_i(s,t).$$

b.効用最大化第 1 段階

各時点tにおいて、地域iにおけるs期生まれの各家計は、当該時点における支出総額$e_i(s,t)$の制約のもと、(2-12)で与えられる効用を最大にするよう、$Q_i(s,t)$及び$k_i^*(s,t)$を決定する。

ゆえに時点tにおける効用最大化問題は、$P_i(t)$を地域iにおける消費財の物価指数、$p_{ki}(t)$を効率単位で測った住宅サービスの価格として、次のように表すことができる。

(P1) $$\max_{Q_i(s,t),k_i^*(s,t)} U(Q_i(s,t),k_i^*(s,t))=\frac{Q_i(s,t)^{\mu}k_i^*(s,t)^{1-\mu}}{\mu^{\mu}(1-\mu)^{1-\mu}},0<\mu<1,$$
$$s.t.P_i(t)Q_i(s,t)+p_{ki}(t)k_i^*(s,t)=e_i(s,t).$$

ここに、地域iにおける消費財の物価指数$P_i(t)$は、

(2-15) $$P_i(t)Q_i(s,t)=p_1(t)c_{i1}(s,t)+\Gamma p_2(t)c_{i2}(s,t).$$

効用最大化の１階条件は、以下のとおりである。

(2-16) $$P_i(t)Q_i(s,t)=\mu e_i(s,t),p_{ki}(t)k_i^*(s,t)=(1-\mu)e_i(s,t).$$

c.効用最大化第２段階と価格指数

次の段階において、各家計は、(2-15),(2-16)の制約のもと、また、$p_2(t)$を所与とし、(2-13)を最大化するよう、$c_{i1}(s,t)$，$c_{i2}(s,t)$を選択する。このとき、効用最大化問題は、

(P2) $$\max_{c_{i1}(s,t),c_{i2}(s,t)}\left[c_{i1}(s,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+c_{i2}(s,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},\ s.t.p_1(t)c_{i1}(s,t)+\Gamma p_2(t)c_{i2}(s,t)=\mu e_i(s,t).$$

財１の価格が１であることを考慮しつつ、効用最大化の１階条件により、以下のマーシャルの需要関数を導き出すことができる。

(2-17) $$c_{i1}(s,t)=P_i(t)^{\sigma-1}\mu e_i(s,t),c_{i2}(s,t)=[\Gamma p_2(t)]^{-\sigma}P_i(t)^{\sigma-1}\mu e_i(s,t).$$

ただし、地域iにおける消費財の物価指数は、

(2-18a) $$P_i(t)=\left[1+\Gamma^{1-\sigma}p_2(t)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

上記(2-18a)と同様の方法により、地域jの物価指数は、以下のように表される。

(2-18b) $$P_j(t)=\left[\Gamma^{1-\sigma}+p_2(t)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

d.間接効用関数

地域iにおけるs期生まれの家計の間接効用関数及びその対数をとった式は、それぞれ、

(2-19) $$V_i(P_i(t),p_{ki}(t),e_i(s,t))=P_i(t)^{-\mu}p_{ki}(t)^{-(1-\mu)}e_i(s,t)=\frac{e_i(s,t)}{P_i(t)^{\mu}p_{ki}(t)^{1-\mu}},$$

(2-20) $$\log V_i(P_i(t),p_{ki}(t),e_i(s,t))=\log e_i(s,t)-\mu\log P_i(t)-(1-\mu)\log p_{ki}(t)$$

であるが、地域jにおける家計の間接効用関数、及びその対数形とも上記(2-19),(2-20)と同一形式で表される。

２）生涯効用最大化

地域i及びjにおけるs期生まれの家計のt時点の生涯効用関数$U(e_i(s,t))$及び$U(e_j(s,t))$は、世代間の割引率$\rho>0$のもと、時点によらず各人の死亡する確率がpであることを考慮し、奈良[2019]の定理2-6で示したように、

$$(2\text{-}21)\ U(e_i(s,t))=\int_t^\infty \log e_i(s,v)e^{-(\rho+p)(v-t)}dv, U(e_j(s,t))=\int_t^\infty \log e_j(s,v)e^{-(\rho+p)(v-t)}dv.$$

（２）予算制約式

両地域の家計とも（労働所得か利子所得かを問わず）すべての所得に対し、社会資本建設の財源とすべく、一定の税率（θ）で所得税を課されるという仮定をおく。

ここに、地域i及びjにおけるs期生まれの代表的家計のt期における労働所得を、それぞれ$w_i(s,t)$及び$w_j(s,t)$、また、市場利子率を$r_i(t)$及び$r_j(t)$、さらに、地域i及びjにおける家計の非人的資産（nonhuman wealth）をそれぞれ$a_i(s,t)$及び$a_j(s,t)$とおくと、地域iの家計が直面する生涯予算制約式は、

$$(2\text{-}22)\ \frac{da_i(s,t)}{dt}=(1-\theta)[r_i(t)+p]a_i(s,t)+(1-\theta)w_i(s,t)-e_i(s,t)$$

であり、地域iの家計が直面する最適化問題は(2-22)の制約のもと(2-21)を最大化することである。

また、地域jにおける最適化問題も、同様に位置づけることができる。

（３）効用最大化の必要条件

上述した両地域の家計による最適化の必要条件のうち、オイラー方程式とN.P.G.条件のそれぞれを、地域iの家計についてのみ以下に提示する（地域jのそれらも同様に表すことができる）。

$$(2\text{-}23)\ \frac{de_i(s,t)}{dt}=[(1-\theta)r_i(t)-\rho-\theta p]e_i(s,t),$$

$$(2\text{-}24)\ \lim_{v\to\infty}a_i(s,v)\exp\left(-\int_t^v(1-\theta)(r_i(\mu)+p)d\mu\right)=0.$$

ここで地域iのs期生まれ代表的家計のt期における人的資産（human wealth）を$h_i(s,t)$とおき、生涯にわたって得る労働賃金の割引現在価値の合計として、以下のように表すこととする（地域jの人的資産$h_j(s,t)$も同様に表すことができる）。

$$(2\text{-}25)\ h_i(s,t)=\int_t^\infty(1-\theta)w_i(s,v)\exp\left\{-(1-\theta)\int_t^v[r_i(\mu)+p]d\mu\right\}dv.$$

上記(2-25)に生涯予算制約式(2-22)を適用すると、奈良[2019]定理 2-7 と同様の方法により、

(2-26) $$\int_t^{\infty} e_i(s,v)\exp\left(-(1-\theta)\int_t^{v}[r_i(\mu)+p]d\mu\right)dv = a_i(s,t)+h_i(s,t).$$

また、オイラー方程式(2-23)より、奈良[2019]補題 2-8 と同様の方法により、以下が得られる。

(2-27) $$\lim_{v\to\infty} e_i(s,v)\exp\left(-(1-\theta)\int_t^{v}[r_i(\mu)+p]d\mu\right)=0.$$

さらに、(2-26)にオイラー方程式(2-23)を適用し、(2-27)を考慮することにより、奈良[2019]の定理 2-9 と同様のプロセスにしたがい、以下が得られる。

(2-28) $$e_i(s,t)=(\rho+p)[a_i(s,t)+h_i(s,t)].$$

（4）集計

a.両地域における人口に関する集計

はじめに、地域 i 及び j の s 期生まれ世代の誕生時期（s 期）における人口を、それぞれ、$N_i(s,s)$ 及び $N_j(s,s)$ とおき、さらに、任意の μ 期における地域ごとのネットの移住人口の比率を、それぞれ、$\lambda_i(\mu)$ 及び $\lambda_j(\mu)$ とおく。このとき、以下が成立する。

(2-29) $$N_i(s,s)=bN_i(s), N_j(s,s)=bN_j(s),$$

(2-30) $$\lambda_i(t)N_i(t)+\lambda_j(t)N_j(t)=0.$$

上記のうち(2-29)は、仮定 2-1②による。また、(2-30)は、定義により明らかである。

また、地域 i 及び j の s 期生まれ世代の t 期における人口を $N_i(s,t)$ 及び $N_j(s,t)$ とすると、

(2-31a) $$\int_{-\infty}^{t} N_i(s,t)ds=\int_{-\infty}^{t} N_i(s,s)\exp\left(\int_s^t[\lambda_i(\mu)-p]d\mu\right)ds=N_i(t),$$

(2-31b) $$\int_{-\infty}^{t} N_j(s,t)ds=\int_{-\infty}^{t} N_j(s,s)\exp\left(\int_s^t[\lambda_j(\mu)-p]d\mu\right)ds=N_j(t)$$

であるが、(2-29)を考慮しつつ、(2-31a),(2-31b)の両辺を時間 t で微分すると、以下(2-32a)及び(2-32b)が得られる。

(2-32a) $$\dot{N}_i(t)/N_i(t)=\lambda_i(t)+n,$$

(2-32b) $$\dot{N}_j(t)/N_j(t)=\lambda_j(t)+n.$$

b.両地域における資産、消費支出に関する集計

2 地域のうち地域i の非人的資産,人的資産,消費支出の水準を、次のように集計する（地域j についても同様の方法と形式で集計することができる)。

(2-33) $A_i(t)=\int_{-\infty}^{t} a_i(s,t)N_i(s,t)ds=\int_{-\infty}^{t} a_i(s,t)N_i(s,s)\exp\left(\int_{s}^{t}[\lambda_i(\mu)-p]d\mu\right)ds,$

(2-34) $H_i(t)=\int_{-\infty}^{t} h_i(s,t)N_i(s,t)ds=\int_{-\infty}^{t} h_i(s,t)N_i(s,s)\exp\left(\int_{s}^{t}[\lambda_i(\mu)-p]d\mu\right)ds,$

(2-35) $E_i(t)=\int_{-\infty}^{t} e_i(s,t)N_i(s,t)ds=\int_{-\infty}^{t} e_i(s,t)N_i(s,s)\exp\left(\int_{s}^{t}[\lambda_i(\mu)-p]d\mu\right)ds.$

上記のうち(2-34)に(2-25),(2-31a)を適用し、労働賃金は、労働者の誕生時点に関わらず等しく分配されること（$w_i(s,v)=w_i(v)$）を仮定することにより、以下が得られる。

(2-36) $H_i(t)=N_i(t)\int_{t}^{\infty}(1-\theta)w_i(v)\exp\left\{-(1-\theta)\int_{t}^{v}[r_i(\mu)+p]d\mu\right\}dv.$

上記(2-36)の両辺を、(2-32a),(2-34)を考慮しつつ、時間t で微分すると、

(2-37) $\dot{H}_i(t)=\{\lambda_i(t)+n+(1-\theta)[r_i(t)+p]\}H_i(t)-(1-\theta)w_i(t)N_i(t).$

ここで、(2-28)の両辺を、(2-33),(2-34)で示した方法にしたがい、集計すると、

(2-38) $E_i(t)=(\rho+p)[A_i(t)+H_i(t)].$

また、奈良[2019]補題 2-10、定理 2-11 で示したと同様の方法により、

$$\dot{A}_i(t)=N_i(t,t)a_i(t,t)+[\lambda_i(t)-p]A_i(t)+\int_{-\infty}^{t}\frac{da_i(s,t)}{dt}N_i(s,s)\exp\left(\int_{s}^{t}[\lambda_i(\mu)-p]d\mu\right)ds$$

が得られるが、$w_i(s,t)=w_i(t)$ に加え$a_i(t,t)=0$ であることを考慮しつつ(2-22)を適用すると、

(2-39a) $\dot{A}_i(t)=\{[\lambda_i(t)-p]+(1-\theta)[r_i(t)+p]\}A_i(t)+(1-\theta)w_i(t)N_i(t)-E_i(t).$

さらに、(2-38)の両辺を時間t で微分し、(2-38)を考慮することにより、

(2-40a) $\dot{E}_i(t)=\{\lambda_i(t)+n+(1-\theta)[r_i(t)+p]-(\rho+p)\}E_i(t)-b(\rho+p)A_i(t).$

上記(2-39a),(2-40a)に対応する地域j の関係式は、それぞれ、

(2-39b) $\dot{A}_j(t)=\{[\lambda_j(t)-p]+(1-\theta)[r_j(t)+p]\}A_j(t)+(1-\theta)w_j(t)N_j(t)-E_j(t),$

(2-40b) $\dot{E}_j(t)=\{\lambda_j(t)+n+(1-\theta)[r_j(t)+p]-(\rho+p)\}E_j(t)-b(\rho+p)A_j(t).$

４．市場均衡

（１）労働市場

地域i及びjにおける労働人口は、それぞれの地域の総人口に等しいから、

(2-41) $N_{mi}(t)+N_{bi}(t)=N_i(t), N_{mj}(t)+N_{bj}(t)=N_j(t).$

次に両地域の労働市場における裁定条件は、2 部門における貨幣賃金率が等しくなること（$w_i(t)=w_{mi}(t)=w_{bi}(t)$ 及び $w_j(t)=w_{mj}(t)=w_{bj}(t)$）であるから、(2-7a),(2-7b),(2-11)より、

(2-42a) $w_i(t)=(1-x)A[L_{mi}(t)/n_{mi}(t)]^x G_i(t)N_i(t)^{-1}=Bp_{bi}(t)G_i(t)N_i(t)^{-1},$

(2-42b) $w_j(t)=p_2(t)(1-x)A[L_{mj}(t)/n_{mj}(t)]^x G_j(t)N_j(t)^{-1}=Bp_{bj}(t)G_j(t)N_j(t)^{-1}.$

（２）土地市場

ここに、$L_{vi}(t)$ 及び $L_{vj}(t)$ を、それぞれ、物理単位で測った地域i及びjにおける遊休地とし、両地域の物理単位で測った土地の総量は一定（L_i 及び L_j）である場合、土地の需給均衡式は、

(2-43) $L_{mi}(t)+K_i(t)+L_{vi}(t)=L_i, L_{mj}(t)+K_j(t)+L_{vj}(t)=L_j.$

ただし､奈良[2019]における補題 2-2 により各期の全人口のうち死ぬ者の割合がpであるから、地域i及びjそれぞれの取引対象となる土地の総量の期待値はpL_i及びpL_jである。つまり、

(2-44a) $\tilde{L}_{mi}(t)+\tilde{K}_i(t)+\tilde{L}_{vi}(t)=p[L_{mi}(t)+K_i(t)+L_{vi}(t)]=pL_i,$

(2-44b) $\tilde{L}_{mj}(t)+\tilde{K}_j(t)+\tilde{L}_{vj}(t)=p[L_{mj}(t)+K_j(t)+L_{vj}(t)]=pL_j.$

上記において、$\tilde{L}_{mi}(t), \tilde{L}_{mj}(t)$ は、地域i及びjそれぞれにおける取引の対象となる産業用地、$\tilde{K}_i(t), \tilde{K}_j(t)$ は取引の対象となる住宅地、$\tilde{L}_{vi}(t), \tilde{L}_{vj}(t)$ は取引の対象となる遊休地である。

（３）資産市場

a.資産市場における需給均衡

ここに、資本移動の完全性、つまり調整コストなしに地域間で資本移動が行われることを仮定すると、両地域の金利は時間を通じて等しくなる（$r_i(t)=r_j(t)=r(t)$）。また、家計は 3 種類の土地（産業用地、住宅地及び遊休地）のいずれかを選択し、資産市場で運用する。

家計が保有する 3 種類の土地は、売却に先立ち、すべて更地に利用転換されることから、取引が行われる際には、用途に関わらず同一の価格が適用される。

そこで、$q_{Li}(t)$ 及び $q_{Lj}(t)$ を、それぞれ地域 i 及び j における用途共通の土地価格とすると、次の資産市場の需給均衡式(2-45)が成立する。

(2-45) $A_i(t)+A_j(t)=q_{Li}(t)L_i+q_{Lj}(t)L_j$.

b.資産市場における裁定条件：預金と産業用地の運用

両地域において時点 t に預金と産業用地のいずれを資産として選択するかの資産裁定式は、両資産の収益率が等しくなることを表現したものであり、以下の通りである。

(2-46) $$r(t)=\frac{\dot{q}_{Li}(t)+\pi_{mi}(t)-p\beta p_{bi}(t)G_i(t)}{q_{Li}(t)}=\frac{\dot{q}_{Lj}(t)+\pi_{mj}(t)-p\beta p_{bj}(t)G_j(t)}{q_{Lj}(t)}.$$

上記(2-46)における $p\beta p_{bi}(t)G_i(t)$ は、産業用地を資産として購入した地域 i の家計が死亡時を想定し、仮定 2-2②にしたがって各期に支払う土地利用転換費用であり、産業用地 1 単位当たり利用転換価格に死亡確率 p を乗じて表される。逆に、$p\beta p_{bi}(t)G_i(t)$ に各人の期待寿命 $1/p$ を乗じ、地域 i の産業用地 1 単位当たり利用転換価格が導出される。

c.資産市場における裁定条件：預金と住宅地の運用

両地域において時点 t に預金と住宅地のいずれを資産として選択するかの資産裁定式は、

(2-47) $$r(t)=\frac{\dot{q}_{Li}(t)+p_{ki}(t)G_i(t)-p\alpha p_{bi}(t)G_i(t)}{q_{Li}(t)}=\frac{\dot{q}_{Lj}(t)+p_{kj}(t)G_j(t)-p\alpha p_{bj}(t)G_j(t)}{q_{Lj}(t)}.$$

上記(2-47)における $p\alpha p_{bi}(t)G_i(t)$ は、住宅地を資産として購入した地域 i の家計が、死亡時を想定し、仮定 2-2①にしたがって各期に支払う土地利用転換費用である。

d.資産市場における裁定条件：預金と遊休地の運用

資産として遊休地を運用する場合、土地利用転換費用を負担せずに済む反面、地代収入を得られない。ゆえに、産業用地と遊休地の裁定条件及び住宅地と遊休地の裁定条件は、それぞれ、

(2-48) $\pi_{mi}(t)=p\beta p_{bi}(t)G_i(t)$, $\pi_{mj}(t)=p\beta p_{bj}(t)G_j(t)$,

(2-49) $p_{ki}(t)=p\alpha p_{bi}(t)$, $p_{kj}(t)=p\alpha p_{bj}(t)$.

したがって、両地域における預金と遊休地の資産裁定式は、先述した資本移動の完全性の仮定のもと、次のように表される。

(2-50) $$r(t)=\frac{\dot{q}_{Li}(t)}{q_{Li}(t)}=\frac{\dot{q}_{Lj}(t)}{q_{Lj}(t)}.$$

（4）財市場

両地域の社会資本とも自地域内の財を費消して生産されることを仮定すると、、財 1 の生産に特化する地域i及び財 2 の生産に特化する地域jの財市場均衡式は、次のように表される。

(2-51) $Y_{mi}(t)=C_{i1}(t)+\Gamma C_{j1}(t)+\dot{G}_i(t), Y_{mj}(t)=\Gamma C_{i2}(t)+C_{j2}(t)+\dot{G}_j(t).$

ただし$C_{i1}(t)$, $C_{j1}(t)$は、それぞれ地域i及びjにおける財 1 の集計された消費水準であり、また$C_{i2}(t)$, $C_{j2}(t)$は、それぞれ地域i及びjにおける財 2 の集計された消費水準である。

ゆえに、(2-17)より、

(2-52) $C_{i1}(t)=P_i(t)^{\sigma-1}\mu E_i(t), C_{i2}(t)=[\Gamma p_2(t)]^{-\sigma}P_i(t)^{\sigma-1}\mu E_i(t).$

また、上記(2-52)に準じ、以下が成立する。

(2-53) $C_{j1}(t)=\Gamma^{-\sigma}P_j(t)^{\sigma-1}\mu E_j(t), C_{j2}(t)=p_2(t)^{-\sigma}P_j(t)^{\sigma-1}\mu E_j(t).$

（5）所得税収の地域間配分と社会資本の建設

両地域の家計から徴収した所得税収を地域i及びjに配分し、両地域における社会資本を建設する費用に充当することを仮定すると、時点tにおける両地域合計の税収$T(t)$は、

(2-54) $T(t)=\theta[w_i(t)N_i(t)+w_j(t)N_j(t)+(r(t)+p)(A_i(t)+A_j(t))].$

税収の地域間配分は、地域の人口に応じて配分されることを想定すると、地域i及びjの人口の総人口に占める割合は$n_i(t)$及び$1-n_i(t)$であるから、両地域に配分される税収をそれぞれ、$T_i(t)$及び$T_j(t)$とおくと、$A(t)\equiv A_i(t)+A_j(t)$のもと、

(2-55a) $T_i(t)=n_i(t)T(t)=\theta n_i(t)[w_i(t)N_i(t)+w_j(t)N_j(t)+(r(t)+p)A(t)],$

(2-55b) $T_j(t)=(1-n_i(t))T(t)=\theta(1-n_i(t))[w_i(t)N_i(t)+w_j(t)N_j(t)+(r(t)+p)A(t)].$

地域i及びjにおいて生産される消費財の一部は(2-51)で表示したように、各地域の社会資本の建設に利用されるが、建設のための財源は各地域に配分される所得税収であるから、地域i及びjそれぞれの社会資本蓄積式は、

(2-56a) $\dot{G}_i(t)=T_i(t)=\theta n_i(t)[w_i(t)N_i(t)+w_j(t)N_j(t)+(r(t)+p)A(t)],$

(2-56b) $p_2(t)\dot{G}_j(t)=T_j(t)=\theta(1-n_i(t))[w_i(t)N_i(t)+w_j(t)N_j(t)+(r(t)+p)A(t)].$

Ⅲ　動学体系

１．動学体系の構築

（１）労働市場、資産市場の各種条件より

資産市場及び労働市場の裁定条件に着目し、(2-6),(2-42a), (2-42b), (2-48)より、

(3-1) $n_{mi}(t)=\dfrac{(1-x)p\beta}{xB}L_{mi}(t), n_{mj}(t)=\dfrac{(1-x)p\beta}{xB}L_{mj}(t).$

しかるに、両地域における労働市場の需給均衡式(2-41)より、

(3-2) $n_{mi}(t)+n_{bi}(t)=1, n_{mj}(t)+n_{bj}(t)=1.$

が得られるが、(3-2)に(2-10a),(2-10b), (3-1)を適用すると、

(3-3) $K_i(t)=\dfrac{B}{p\alpha}-\dfrac{\beta}{x\alpha}L_{mi}(t), K_j(t)=\dfrac{B}{p\alpha}-\dfrac{\beta}{x\alpha}L_{mj}(t).$

（２）各種価格指標の表示

はじめに、今後の説明を展開する便宜上、$\hat{A}\equiv\dfrac{xB}{p\beta}A\left[\dfrac{(1-x)p\beta}{xB}\right]^{1-x}$ を定義する。

このとき、資産市場の裁定条件から導出された(2-6),(2-48),(3-1)より、それぞれ、

(3-4) $p_{bi}(t)=\dfrac{\hat{A}}{B}, p_{bj}(t)=p_2(t)\dfrac{\hat{A}}{B}.$

また、労働市場の裁定条件式(2-42a),(2-42b)に(3-4)を適用し、

(3-5) $w_i(t)N_i(t)=\hat{A}G_i(t), w_j(t)N_j(t)=p_2(t)\hat{A}G_j(t).$

さらに、(2-49)に(3-4)を適用し、地域i及びjそれぞれにおける住宅地代は、

(3-6) $p_{ki}(t)=p\alpha p_{bi}(t)=\dfrac{p\alpha\hat{A}}{B}, p_{kj}(t)=p\alpha p_{bj}(t)=p_2(t)\dfrac{p\alpha\hat{A}}{B}.$

ここで、住宅サービスの消費に着目し、(3-6)を考慮しつつ、第 1 段階における効用最大化の 1 階条件(2-16)を、地域iの全人口で集計すると、

(3-7a) $\dfrac{p\alpha\hat{A}}{B}G_i(t)K_i(t)=(1-\mu)E_i(t).$

地域jの住宅サービスの消費についても同様に、(3-6)を考慮しつつ、

(3-7b) $p_2(t)\dfrac{p\alpha\hat{A}}{B}G_j(t)K_j(t)=(1-\mu)E_j(t)$

が得られる。

次に、(3-3),(3-7a)より $K_i(t)$ を、(3-3),(3-7b)より $K_j(t)$ を、それぞれ消去すると、

(3-8) $$L_{mi}(t)=\frac{xB}{p\beta}\left[1-\hat{A}^{-1}(1-\mu)\frac{E_i(t)}{G_i(t)}\right], L_{mj}(t)=\frac{xB}{p\beta}\left[1-\hat{A}^{-1}(1-\mu)\frac{E_j(t)}{p_2(t)G_j(t)}\right].$$

となり、$L_{mi}(t)$ は $E_i(t), G_i(t)$ で、$L_{mj}(t)$ は $E_j(t), G_j(t), p_2(t)$ で、それぞれ表される。

（3）財市場の均衡式より

地域 i における集計された生産関数(2-4')に(3-1)を適用し、

(3-9a) $$Y_{mi}(t)=\left(\frac{xB}{p\beta}\right)^{-1}\hat{A}G_i(t)L_{mi}(t).$$

地域 j における集計された生産関数についても同様に、

(3-9b) $$Y_{mj}(t)=\left(\frac{xB}{p\beta}\right)^{-1}\hat{A}G_j(t)L_{mj}(t).$$

地域 i 及び j における物価指数についても $\phi\equiv\Gamma^{1-\sigma}$ のもと(2-18a),(2-18b)より、それぞれ、

(3-10) $$P_i(t)=\left[1+\phi p_2(t)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}, P_j(t)=\left[\phi+p_2(t)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

両地域における財市場の需給均衡式(2-51)の 2 つの式のそれぞれの左辺に、(3-8)を考慮しつつ(3-9a),(3-9b)を、右辺に(2-52),(2-53),(2-56a),(2-56b),(3-10)を、それぞれ適用すると、

(3-11a)
$$\begin{aligned}&\hat{A}G_i(t)-(1-\mu)E_i(t)\\&=\frac{\mu E_i(t)}{1+\phi p_2(t)^{1-\sigma}}+\frac{\phi\mu E_j(t)}{\phi+p_2(t)^{1-\sigma}}+\theta n_i(t)\left\{\hat{A}[G_i(t)+p_2(t)G_j(t)]+(r(t)+p)A(t)\right\},\end{aligned}$$

(3-11b)

$$\begin{aligned}&p_2(t)\hat{A}G_j(t)-(1-\mu)E_j(t)\\&=\frac{p_2(t)^{1-\sigma}\phi\mu E_i(t)}{1+\phi p_2(t)^{1-\sigma}}+\frac{p_2(t)^{1-\sigma}\mu E_j(t)}{\phi+p_2(t)^{1-\sigma}}+\theta(1-n_i(t))\left\{\hat{A}[G_i(t)+p_2(t)G_j(t)]+(r(t)+p)A(t)\right\}.\end{aligned}$$

（4）地域間の資本移動と資本収支

両地域における集計された生涯予算制約式(2-39a),(2-39b)を辺々足し合わせると、

(3-12)

$$\begin{aligned}\dot{A}(t)=&(1-\theta)\left\{w_i(t)N_i(t)+w_j(t)N_j(t)+(r(t)+p)A(t)\right\}-pA(t)+[\lambda_i(t)A_i(t)+\lambda_j(t)A_j(t)]\\&-[E_i(t)+E_j(t)].\end{aligned}$$

定理 3-1　資本が地域間を自由に移動する場合、地域間資本収支は常に均衡する。つまり、

(3-13) $\lambda_i(t)A_i(t)+\lambda_j(t)A_j(t)=0.$

（証明）付録 1 を参照せよ。

上記の定理 3-1 を(3-12)に適用し、

(3-14) $\dot{A}(t)=\left\{(1-\theta)[r(t)+p]-p\right\}A(t)+(1-\theta)\hat{A}[G_i(t)+p_2(t)G_j(t)]-[E_i(t)+E_j(t)].$

また、(2-45),(2-50)より、

(3-15) $\dfrac{\dot{A}(t)}{A(t)}=r(t)$

が得られ、両地域合計の資産 $A(t)$ の成長率が、毎期、地域共通の市場利子率 $r(t)$ に等しくなる。

（5）地域間の人口移動

a.両地域の家計の生涯効用

地域 i 及び j の s 期生まれ代表的家計の t 期以降の生涯効用をそれぞれ、$u_i(s,t)$ 及び $u_j(s,t)$ とおき、それぞれ、以下のように、(2-20)で提示した間接効用の形式で定義する。

(3-16a) $u_i(s,t)=e^{(\rho+p)t}\int_t^{\infty}\log V_i(P_i(t),p_{ki}(t),e_i(s,t))e^{-(\rho+p)v}dv,$

(3-16b) $u_j(s,t)=e^{(\rho+p)t}\int_t^{\infty}\log V_j(P_j(t),p_{kj}(t),e_j(s,t))e^{-(\rho+p)v}dv.$

ここに、(2-20),(3-6),(3-10)より、

(3-17a) $\log V_i(P_i(t),p_{ki}(t),e_i(s,t))=\log e_i(s,t)+\dfrac{\mu}{\sigma-1}\log[1+\phi p_2(t)^{1-\sigma}]+\xi,$

(3-17b)

$$\log V_j(P_i(t),p_{kj}(t),e_j(s,t))=\log e_j(s,t)+\frac{\mu}{\sigma-1}\log[\phi+p_2(t)^{1-\sigma}]-(1-\mu)\log p_2(t)+\xi.$$

ただし、(3-17a)及び(3-17b)において、

$\xi=-(1-\mu)(\log p+\log\alpha+\log\hat{A}-\log B)$.

s 期生まれ家計の t 期以降の生涯効用の格差を $\Delta u(s,t)$ とおくと、(3-17a),(3-17b)より、

$$\Delta u(s,t)=u_i(s,t)-u_j(s,t)$$

(3-18) $=e^{(\rho+p)t}\int_t^{\infty}\Big(\{\log e_i(s,v)-\log e_j(s,v)\}$

$$+\frac{\mu}{\sigma-1}\{\log[1+\phi p_2(t)^{1-\sigma}]-\log[\phi+p_2(t)^{1-\sigma}]\}+(1-\mu)\log p_2(v)\Big)e^{-(\rho+p)v}dv.$$

b.家計による居住地選択の基準及び地域ごとの人口動態

ここでは、Baldwin[2001],Ottaviano[2001],Ito[2010]で提示された長期的な視点に則り、s 期生まれ家計が t 期において居住する地域を選択する基準を、以下に示す。

仮定 3-1　地域 j の s 期生まれの家計が t 期において居住地を選択する（地域 i に移住するかまたは地域 j にとどまるかを決定する）に際し、移住によって得られる便益が、移住に要するコストを上回る場合には移住し、便益がコストを下回れば t 期において移住しない。

地域 j の s 期生まれの家計が t 期に地域 i に移住することによって得られる便益は、t 期以降に地域 i に移住した場合に得られる効用水準と、地域 j にとどまる場合に得られる効用水準との差で測られる。また、移住に要するコストは t 期における地域 i への移住人口比率 $\lambda_i(t)$ に比例する。

上記仮定 3-1 により、地域 j の s 期生まれの家計が t 期に地域 i に移住することによって得られる便益 $BE_{ji}(s,t)$ 及びコスト $CM_{ji}(s,t)$ を、次のように定義する。

(3-19) $$BE_{ji}(s,t) = u_i(s,t) - u_j(s,t) = \Delta u(s,t)\,, CM_{ji}(s,t) = \frac{1}{\kappa}\lambda_i(t), \kappa > 0.$$

上記の定義により、地域 j の s 期生まれの家計のうち t 期において地域 i に移住することを選択する家計と地域 j にとどまることを選択する家計とが共存するための必要十分条件は、

(3-21) $$\lambda_i(t) = \kappa\Delta u(s,t)\,.$$

補題 3-2　s 期生まれの家計の t 期以降の生涯効用の地域格差 $\Delta u(s,t)$ は、両地域の t 期における消費水準や生涯にわたる物価の差に依存する。具体的に、次の(3-22) で表される。

(3-22) $$\begin{aligned}\Delta u(s,t) &= \frac{1}{\rho + p}\{\log e_i(s,t) - \log e_j(s,t)\} \\ &+ e^{(\rho+p)t}\int_t^{\infty}\left(\frac{\mu}{\sigma - 1}\{\log[1+\phi p_2(v)^{1-\sigma}] - \log[\phi + p_2(v)^{1-\sigma}]\} + (1-\mu)\log p_2(v)\right)e^{-(\rho+p)v}dv.\end{aligned}$$

（証明）付録 2 を参照せよ。

定理 3-3　s 期生まれの家計の t 期における居住地選択に関し、次の微分方程式によってまとめることができる。

(3-23) $$\dot{n}_i(t) / n_i(t) = \lambda_i(t),$$

(3-24) $$\begin{aligned}\dot{\lambda}_i(t) &= (\rho + p)\lambda_i(t) - \kappa\{\log e_i(s,t) - \log e_j(s,t)\} \\ &- \kappa\left(\frac{\mu}{\sigma - 1}\{\log[1+\phi p_2(t)^{1-\sigma}] - \log[\phi + p_2(t)^{1-\sigma}]\} + (1-\mu)\log p_2(t)\right).\end{aligned}$$

（証明）定理の前半につき、地域 i の人口増加率に関する(2-32a)から経済・社会全体の人口成長率に関する(2-1)を辺々差し引くことにより、(3-23)がしたがう。

定理の後半につき、補題 3-2 における(3-22)を(3-21)の右辺に適用し、t で微分することにより、(3-24)がしたがう。　　（証明了）

（６）動学体系の集約

a.定常状態の定義と主要な変数の設定

本論における定常状態は、両地域の資産 $A_i(t), A_j(t)$ 、消費支出 $E_i(t), E_j(t)$ 及び消費財の生産水準 $Y_{mi}(t), Y_{mj}(t)$ が時間を通じ、両地域の社会資本ストック $G_i(t), G_j(t)$ と同一の率で成長するとともに、両地域の成長率が等しくなる状態を意味する。このとき、両地域の物理単位で測った地価 $q_{Li}(t), q_{Lj}(t)$ も $G_i(t), G_j(t)$ と同一の率で上昇するが、上昇率は、(2-50,)(3-15)より、両地域の共通の金利 $r(t)$ の水準と等しくなる。また、第 2 財の相対価格 $p_2(t)$ は時間を通じ一定となる。

そこで、社会資本ストックとの比率に着目し、新たな動学変数を、以下のように定義する。

$$a_i(t) = \frac{A_i(t)}{G_i(t)}, a_j(t) = \frac{A_j(t)}{G_j(t)}, e_i(t) = \frac{E_i(t)}{G_i(t)}, e_j(t) = \frac{E_j(t)}{G_j(t)},\ g(t) = \frac{G_j(t)}{G_i(t)}.$$

ここで、資本収支の均衡式(3-13)の両辺を $G_i(t)$ で除し、新たな動学変数を用いて表すと、

(3-25) $\lambda_i(t)a_i(t) + \lambda_j(t)g(t)a_j(t) = 0$.

また、今後の説明の便宜上、次のように新たな変数 $a(t)$ を定義する。

(3-26) $\dfrac{A(t)}{G_i(t)} = a_i(t) + g(t)a_j(t) = a(t)$.

b.財 2 の相対価格及び配当込みの市場利子率

はじめに、(3-15)の両辺に $A(t)$ を乗じた式と(3-14) より $\dot{A}(t)$ を消去し、(3-26)を考慮しつつ $G_i(t)$ で除すると、以下が導出される。

(3-27) $\theta\{\hat{A}[1 + p_2(t)g(t)] + \hat{r}(t)a(t)\} = \hat{A}[1 + p_2(t)g(t)] - [e_i(t) + g(t)e_j(t)]$.

また、(3-11a)の両辺を、(3-26)を考慮しつつ $G_i(t)$ で除し、上記の定義を用いて表すと、

(3-28) $\hat{A} - (1-\mu)e_i(t) = \dfrac{\mu e_i(t)}{1 + \phi p_2(t)^{1-\sigma}} + \dfrac{\phi\mu g(t)e_j(t)}{\phi + p_2(t)^{1-\sigma}} + \theta n_i(t)\left\{\hat{A}[1 + p_2(t)g(t)] + \hat{r}(t)a(t)\right\}.$

次に、(3-27),(3-28)より、以下が得られる。

(3-29)

$$[\hat{A} - (1-\mu)e_i(t)][1 + \phi p_2(t)^{1-\sigma}][\phi + p_2(t)^{1-\sigma}] = \mu e_i(t)[\phi + p_2(t)^{1-\sigma}] + \phi\mu g(t)e_j(t)[1 + \phi p_2(t)^{1-\sigma}]$$
$$+ n_i(t)\{\hat{A}[1 + p_2(t)g(t)] - [e_i(t) + g(t)e_j(t)]\}[1 + \phi p_2(t)^{1-\sigma}][\phi + p_2(t)^{1-\sigma}].$$

上記(3-29)より $p_2(t)$ を次の(3-29')にように、$e_i(t), e_j(t), g(t), n_i(t)$ を用い、表すことができる。

(3-29') $p_2(t) = \varphi(e_i(t), e_j(t), g(t), n_i(t))$.

他方、(3-27)より、

(3-30) $\hat{r}(t) = \dfrac{1}{a(t)}\left\{\dfrac{1-\theta}{\theta}\hat{A}[1+p_2(t)g(t)] - \dfrac{1}{\theta}[e_i(t)+g(t)e_j(t)]\right\}$.

上記(3-30)の右辺に(3-29')を適用すると、

(3-30')
$$\begin{aligned}\hat{r}(t) &= \frac{1}{a(t)}\left\{\frac{1-\theta}{\theta}\hat{A}[1+\varphi(e_i(t), e_j(t), g(t), n_i(t))g(t)] - \frac{1}{\theta}[e_i(t)+g(t)e_j(t)]\right\}\\ &\equiv \hat{r}(a(t), e_i(t), e_j(t), g(t), n_i(t)).\end{aligned}$$

最後に、動学分析の次の段階に進む準備として、以下を提示する。

(3-31) $\lambda_i(t)n_i(t) + \lambda_j(t)(1-n_i(t)) = 0$,

(3-32) $a_i(t) = n_i(t)a(t), g(t)a_j(t) = (1-n_i(t))a(t)$.

上記のうち、(3-31)は、$n_i(t)$ の定義を参照しつつ(2-30)の両辺を社会全体の人口 $N(t)$ で除することにより、ただちにしたがう。

次に、(3-25)と(3-31)から $\lambda_j(t)$ を消去することにより、(3-32)がしたがう。

c.動学分析に関わる微分方程式体系の集約

はじめに、(3-15)の右辺に(3-30')を適用し、

(3-33) $\dfrac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \dfrac{1}{\theta a(t)}\left\{(1-\theta)\hat{A}[1+\varphi(e_i(t), e_j(t), g(t), n_i(t))g(t)] - [e_i(t)+g(t)e_j(t)]\right\} - p.$

次に、(2-40a),(2-40b)より、(3-30'),(3-32)を考慮しつつ、新たに定義した変数を用いて表すと、

(3-34a)

$$\frac{\dot{E}_i(t)}{E_i(t)} = \left\{\lambda_i(t) + n + (1-\theta)\hat{r}(a(t), e_i(t), e_j(t), g(t), n_i(t)) - (\rho+p)\right\} - b(\rho+p)\frac{n_i(t)a(t)}{e_i(t)},$$

(3-34b)

$$\frac{\dot{E}_j(t)}{E_j(t)} = \left\{\lambda_j(t) + n + (1-\theta)\hat{r}(a(t), e_i(t), e_j(t), g(t), n_i(t)) - (\rho+p)\right\} - b(\rho+p)\frac{(1-n_i(t))a(t)}{g(t)e_j(t)}$$

が導出される。

次に(2-56a),(2-56b)のそれぞれの両辺を$G_i(t)$で除し、(3-5),(3-29'),(3-30') を考慮し、新たな変数を用いて表すと、

(3-35a)

$$\frac{\dot{G}_i(t)}{G_i(t)} = \theta n_i(t)\Big\{\hat{A}[1+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))g(t)]++\hat{r}(a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))a(t)\Big\},$$

(3-35b)

$$\frac{\dot{G}_j(t)}{G_j(t)} = \frac{\theta(1-n_i(t))\{\hat{A}[1+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))g(t)]+\hat{r}(a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))a(t)\}}{g(t)\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))}.$$

上記のうち、はじめに、(3-33)から(3-35a)を辺々差し引きし、両辺に$a(t)$を乗じると、

(3-36)

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{\theta}\Big\{(1-\theta)\hat{A}[1+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))g(t)]-[e_i(t)+g(t)e_j(t)]\Big\}-pa(t)$$

$$-\theta n_i(t)a(t)\{\hat{A}[1+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))g(t)]+\hat{r}(a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))a(t)\}$$

$$\equiv F_1[a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t),\lambda_i(t)].$$

次に(3-34a),(3-34b)からそれぞれ(3-35a),(3-35b)を差し引き、(3-31)も考慮しつつ整理すると、

(3-37a)

$$\dot{e}_i(t) = \Big\{\lambda_i(t)+n+(1-\theta)\hat{r}(a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))-(\rho+p)\Big\}e_i(t)-b(\rho+p)n_i(t)a(t)$$

$$-\theta n_i(t)e_i(t)\{\hat{A}[1+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))g(t)]+\hat{r}(a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))a(t)\}$$

$$\equiv F_2[a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t),\lambda_i(t)],$$

(3-37b)

$$\dot{e}_j(t) = \left\{-\frac{n_i(t)}{1-n_i(t)}\lambda_i(t)+n+(1-\theta)\hat{r}(a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))-(\rho+p)\right\}e_j(t)$$

$$-b(\rho+p)\frac{(1-n_i(t))a(t)}{g(t)}$$

$$-\frac{\theta(1-n_i(t))e_j(t)\{\hat{A}[1+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))g(t)]+\hat{r}(a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))a(t)\}}{g(t)\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))}$$

$$\equiv F_3[a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t),\lambda_i(t)].$$

さらに、(3-35b)から(3-35a)を差し引きし、整理すると、

$$\dot{g}(t) = \theta\left[\frac{1-n_i(t)}{\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))}-g(t)n_i(t)\right]$$

(3-38) $$\times\{\hat{A}[1+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))g(t)]+\hat{r}(a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))a(t)\}g(t)$$

$$\equiv F_4[a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t),\lambda_i(t)].$$

また、(3-23)の両辺に$n_i(t)$を乗ずると、

(3-39) $\dot{n}_i(t)=\lambda_i(t)n_i(t)\equiv F_5[a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t),\lambda_i(t)].$

さらに、(3-24)の右辺に(3-29')を適用すると、

(3-40)

$$\dot{\lambda}_i(t)=(\rho+p)\lambda_i(t)-\kappa\{\log e_i(s,t)-\log e_j(s,t)\}$$
$$-\frac{\kappa\mu}{\sigma-1}\{\log[1+\phi\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))^{1-\sigma}]-\log[\phi+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))^{1-\sigma}]\}$$
$$-\kappa(1-\mu)\log\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t)).$$

が得られるが、上記右辺第２項の$e_i(s,t),e_j(s,t)$につき、動学分析を可能とするため、それぞれ、

$\hat{e}_i(t)=E_i(t)/N_i(t)$, $\hat{e}_j(t)=E_j(t)/N_j(t)$を代理変数として用いることとする。

このうち、$e_i(s,t)$の代理変数である$\hat{e}_i(t)$につき、

$$\hat{e}_i(t)=\frac{E_i(t)}{N_i(t)}=\frac{G_i(t)e_i(t)}{N(t)n_i(t)}=\frac{G_i(t)}{N(t)}\cdot\frac{e_i(t)}{n_i(t)}\Rightarrow\log\hat{e}_i(t)=\log G_i(t)+\log e_i(t)-\log n_i(t)-\log N(t)$$

である点等を考慮すると、(3-40)は、以下のように書き換えることができる。

(3-40')

$$\dot{\lambda}_i(t)=(\rho+p)\lambda_i(t)-\kappa\{[\log e_i(t)-\log e_j(t)]-[\log n_i(t)-\log(1-n_i(t))]-\log g(t)\}$$
$$-\frac{\kappa\mu}{\sigma-1}\{\log[1+\phi\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))^{1-\sigma}]-\log[\phi+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))^{1-\sigma}]\}$$
$$-\kappa(1-\mu)\log\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))\equiv F_6[a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t),\lambda_i(t)].$$

以上、本論における動学体系は、(3-36),(3-37a),(3-37b),(3-38),(3-39),(3-40')の６本の微分方程式によって構成され、これらより、$a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t),\lambda_i(t)$の６変数を求める構造となる。

２．分住均衡解の考察

本論における分住均衡とは、地域i及びj両地域の家計が、前節「（５）地域間の人口移動」で掲げたルールに基づき、生涯効用最大化を念頭に置き、居住地を選択する行動を繰り返した結果、ある有限の期間が経過した後、地域間の人口分布がある一定の状態に収束することを意味する。

既に述べたように、定常的成長均衡において両地域の物理単位で測った地価も含め、すべての状態変数が両地域の社会資本ストックと同一の率で成長することにより、社会資本ストック１単位当たり資産、消費支出が時間を通じて一定となるとともに地域間の社会資本ストックの比率も時間を通じて一定となるが、以下では、かかる定常的成長均衡と関連付けながら、本論における分住均衡のあり方を考察し、明らかにする。

（1）対称定常均衡の導出

定常状態では(3-36),(3-37a),(3-38)において、$\dot{a}(t)=\dot{e}_i(t)=\dot{g}(t)=0$ となるから、

(3-41)

$$\frac{1}{\theta a(t)}\left\{(1-\theta)\hat{A}[1+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))g(t)]-[e_i(t)+g(t)e_j(t)]\right\}-p$$
$$=\theta n_i(t)\{\hat{A}[1+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))g(t)]+\hat{r}(a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))a(t)\},$$

(3-42)
$$\left\{\lambda_i(t)+n+(1-\theta)\hat{r}(a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))-(\rho+p)\right\}-b(\rho+p)n_i(t)\frac{a(t)}{e_i(t)}$$
$$=\theta n_i(t)\{\hat{A}[1+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))g(t)]+\hat{r}(a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))a(t)\},$$

(3-43) $$\frac{1-n_i(t)}{n_i(t)g(t)}=\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))=p_2(t).$$

また、上記のうち(3-41),(3-42)より、

(3-44)
$$\frac{1}{\theta a(t)}\left\{(1-\theta)\hat{A}[1+\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))g(t)]-[e_i(t)+g(t)e_j(t)]\right\}$$
$$=\left\{\lambda_i(t)+(1-\theta)\hat{r}(a(t),e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))+(n-\rho)\right\}-b(\rho+p)n_i(t)\frac{a(t)}{e_i(t)}.$$

また、$\dot{e}_i(t)=\dot{e}_j(t)$ が成立するから、(3-37a),(3-37b)に基づき、(3-31),(3-43)も考慮し、

(3-45) $$\lambda_i(t)=b(\rho+p)a(t)(1-n_i(t))\left(\frac{n_i(t)}{e_i(t)}-\frac{1-n_i(t)}{g(t)e_j(t)}\right).$$

さらに、定常状態では(3-40')において、$\dot{\lambda}_i(t)=0$ となるから、(3-43)も考慮し、

(3-46) $$\lambda_i(t)=\frac{\kappa}{\rho+p}\left[\log\frac{e_i(t)}{g(t)e_j(t)}p_2(t)g(t)+\log\left(\frac{1+\phi p_2(t)^{1-\sigma}}{\phi+p_2(t)^{1-\sigma}}\right)^{\frac{\mu}{\sigma-1}}+\log p_2(t)^{1-\mu}\right].$$

本論における分住均衡は、(3-39)において、$\dot{n}_i(t)=0$ が成立することにより、達成される。

このとき $\lambda_i(t)=0$ または $n_i(t)=0$ が成立するが、このうち $\lambda_i(t)=0$ に着目し、(3-45)において $a(t)\neq 0$ を仮定すると、次の(3-47a),(3-47b)のいずれかがしたがう。

(3-47a) $\dfrac{n_i(t)}{e_i(t)}=\dfrac{1-n_i(t)}{g(t)e_j(t)}\Leftrightarrow g(t)e_j(t)=\dfrac{1-n_i(t)}{n_i(t)}e_i(t)$, (3-47b) $n_i(t)=1.$

しかるに(3-47b)の $n_i(t)=1$ を(3-43)に適用すると $p_2(t)=0$ となり、これを(3-46)に適用すると、$\lambda_i(t)$ は負の無限大に発散し、(3-45)に代入した場合に $\lambda_i(t)=0$ となることと矛盾し、$n_i(t)=1$ は分住均衡値として適さない。同様に、$n_i(t)=0$ も分住均衡値として適さない。

そこで、(3-47a)を、$\lambda_i(t)=0$ とともに、(3-46)に適用すると、

(3-48) $$\left(\frac{1+\phi p_2(t)^{1-\sigma}}{\phi+p_2(t)^{1-\sigma}}\right)^{\frac{\mu}{\sigma-1}} p_2(t)^{1-\mu}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{1+\phi p_2(t)^{1-\sigma}}{\phi+p_2(t)^{1-\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}=p_2(t)^{-\frac{1-\mu}{\mu}}.$$

補題 3-4　分住均衡において地域 j で生産される財 2 の相対価格は $p_2(t)=1$ に一意に定まる。
すなわち、

(3-49) $p_2(t)=\varphi(e_i(t),e_j(t),g(t),n_i(t))=1.$

（証明）(3-48)の右辺と左辺を、それぞれ、以下のような $p_2(t)$ の式として定義する。

$$f_1[p_2(t)]=p_2(t)^{-\frac{1-\mu}{\mu}},f_2[p_2(t)]=\left(\frac{1+\phi p_2(t)^{1-\sigma}}{\phi+p_2(t)^{1-\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}.$$

上記のうち、$f_1[p_2(t)]$ については、

$$\lim_{p_2(t)\to 0} f_1[p_2(t)]=\infty,\lim_{p_2(t)\to\infty} f_1[p_2(t)]=0,f_1[1]=1,f_1'[p_2(t)]=-\frac{1-\mu}{\mu}p_2(t)^{-\frac{1}{\mu}}<0$$

が成り立ち、$f_2[p_2(t)]$ については、

$$f_2[0]=\phi^{\frac{1}{\sigma-1}}<1,f_2[1]=1,f_2'[p_2(t)]=\frac{1}{\sigma-1}\left(\frac{1+\phi p_2(t)^{1-\sigma}}{\phi+p_2(t)^{1-\sigma}}\right)^{\frac{2-\sigma}{\sigma-1}}\cdot\frac{(\sigma-1)(1-\phi^2)p_2(t)^{-\sigma}}{[\phi+p_2(t)^{1-\sigma}]^2}>0$$

が成り立つことがわかるが、これらにより、(3-48)の解は $p_2(t)=1$ に一意に定まる。

（証明了）

上記(3-49)を(3-47a)とともに、(3-29)に適用することにより、

(3-50) $\hat{A}(1+\phi)=\hat{A}n_i(t)(1+g(t))-\phi\mu e_i(t)(1-g(t))$

が得られ、これにより、本論における分住均衡のあり方の 1 つが定まることがわかるが、これを、次頁に定理 3-5 として提示する。

定理 3-5　両地域に人口が均等に分布し、両地域の社会資本ストック比率が 1 となるような対称定常均衡、すなわち、次の(3-51) が本論における分住均衡の 1 つとなる。

(3-51) $n_i(t) = \dfrac{1}{2}, g(t) = 1.$

（証明）補題 3-4 が成立する前提のもと、(3-51)は(3-50)を満たすことから、定理が成立する。

（証明了）

（2）対称定常均衡以外の分住均衡の存在

この点に関連し、(3-49)を(3-43)に適用し、

(3-52) $\dfrac{1-n_i(t)}{n_i(t)g(t)} = 1 \Leftrightarrow 1+g(t) = \dfrac{1}{n_i(t)}, 1-g(t) = 2-\dfrac{1}{n_i(t)}$

が導出されるが、これを(3-50)に適用し、

(3-53) $e_i(t) = \dfrac{\hat{A}}{\mu}\left(\dfrac{n_i(t)}{1-2n_i(t)}\right) \Leftrightarrow n_i(t) = \dfrac{\mu e_i(t)}{\hat{A}+2\mu e_i(t)} < \dfrac{1}{2}.$

他方、(3-52)の左側の式を(3-47a)に適用し、$e_j(t) = e_i(t)$ であることがわかるが、これを(3-49)とともに(3-30')に適用し、(3-52)を考慮すると、

(3-54) $\hat{r}(t) = \dfrac{1+g(t)}{\theta a(t)}[(1-\theta)\hat{A} - e_i(t)] = \dfrac{1}{\theta n_i(t)a(t)}[(1-\theta)\hat{A} - e_i(t)].$

また、(3-54)を(3-49),(3-52)とともに(3-41)に適用し、

(3-55) $\dfrac{1}{\theta n_i(t)a(t)}[(1-\theta)\hat{A} - e_i(t)] - p = \hat{A} - e_i(t)$

がしたがうが、これに(3-53)を適用すると、

(3-56) $r(t) = \hat{A}\left(1-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{n_i(t)}{1-2n_i(t)}\right).$

上記(3-56)より、市場利子率（経済成長率）$r(t)$ が正になるための必要十分条件は、

(3-57) $n_i(t) < \dfrac{\mu}{2\mu+1} < \dfrac{1}{2}.$

以上により、(3-51)の対称定常均衡以外に、$\dot{n}_i(t) = \dot{\lambda}_i(t) = 0$ を満たす非対称な均衡解が、分住均衡解としてとして存在することがわかるが、この点を定理 3-6 として以下に提示する。

定理 3-6　両地域に人口ならびに社会資本ストックが不均等に分布する非対称定常均衡解が本論における分住均衡の 1 つであり、その際、地域 i の人口比率は(3-53)で表される。

Ⅳ　比較静学分析～対称定常均衡における所得税率の変更が及ぼす影響～

前章Ⅲの「２．分住均衡解の考察」では、地域間の人口や社会資本ストックの２つの地域への分布のあり方として対称定常均衡解と非対称定常均衡解の２つの分住均衡解が存在し得ることが示されたが、ここでは、紙面の制約上対称定常均衡のみに着目し、社会資本整備の財源としての所得税率の変更が経済成長率や土地の用途選択に及ぼす影響を考察し、分析する。

（１）所得税率θの変更が経済成長率に及ぼす影響

対称定常均衡における方程式体系を整理すべく関連する変数を$a, e_i, e_j, g, n_i, \lambda_i, p_2$とおくと(3-47a)も考慮しつつ、(3-51)より、

(4-1) $\lambda_i = 0, p_2 = 1, n_i = 1/2, g = 1, e_i = e_j \equiv e.$

次に、対称定常均衡において生命保険会社より支払われる配当込みの市場利子率を$\hat{r}$、配当を含まない市場利子率（経済成長率）をrとおき、上記(4-1)を(3-30)に適用すると、

(4-2) $\hat{r} = r + p = \dfrac{2}{\theta a}[(1-\theta)\hat{A} - e]$

が得られるが、これを、(4-1)とともに(3-44)に適用すると、

(4-3) $\dfrac{2}{a}[(1-\theta)\hat{A} - e] + \dfrac{b(\rho + p)}{2}\dfrac{a}{e} = n - \rho.$

また、(4-1),(4-2)を(3-41)に適用すると、

(4-4) $\dfrac{2}{\theta a}[(1-\theta)\hat{A} - e] - p = \hat{A} - e.$

以上、(4-3),(4-4)よりa, eを導出し、これを(4-2)に適用し、$\hat{r}$及びrが求められる。

しかるに、上記のうち(4-2),(4-4)より、

(4-5) $e = \hat{A} - (\hat{r} - p).$

が得られるが、これを(4-2)の右辺に適用すると、

(4-6) $a = \dfrac{2}{\theta \hat{r}}[(\hat{r} - p) - \theta \hat{A}].$

そして、(4-5),(4-6)を(4-2)とともに(4-3)の左辺に適用すると、

(4-7) $\dfrac{\theta \hat{r}}{b(\rho + p)}[\theta \hat{r} - (n - \rho)] = 1 + \dfrac{(1-\theta)\hat{A}}{(\hat{r} - p) - \hat{A}}$

が得られ、これより、$\hat{r}$及びrを直接的に求める方式に方程式体系を縮約できることがわかる。

また、(4-5),(4-6)より、$a > 0, e > 0$を満たす適切な対称定常均衡解が存在するための条件は、

(4-8) $\theta < (\hat{r} - p)/\hat{A} < 1.$

しかるに方程式体系を(4-7)に縮約しても尚、解析的な手法により、$d\hat{r}/d\theta$の符号を確定することは困難であることから、所得税率θの変更が、対称定常均衡における経済成長率（$r = \hat{r} - p$）に及ぼす影響等を、数値解析の手法により、考察することとする。

その際、税率θ以外の外生変数を、以下のように設定した。

$b = 0.021, p = 0.011, A = 3.0, B = 1, x = 0.5, \alpha = 1, \beta = 3, \sigma = 3, \mu = 0.9, \rho = 0.005, \Gamma = 1.5.$

上記の外生変数のもと、税率θを、$\theta = 0.001$から(4-8)を満たす適正な解が存在する上限まで変化させ、経済成長率（r）を計算した結果を図に表すと、以下のようになる。

図1　所得税率の変更が経済成長率に及ぼす影響

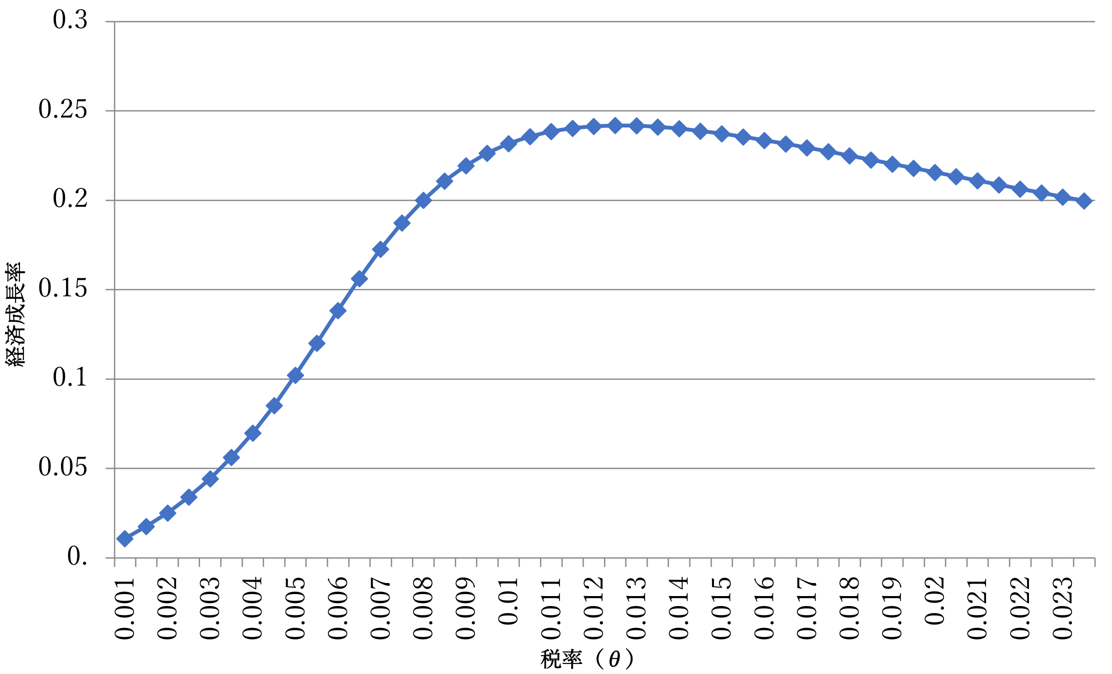


図 1 より、税率θが特定の値をとる場合、経済成長率（r）が最大化されることがわかるが、解析的な考察も交え、定理 4-1 として以下に提示することとする。

定理 4-1　所得税率θの税率がある閾値$\theta = \theta^*$に達するまでの間、増税（θの増加）により経済成長率（市場利子率）rは上昇する。しかるに、閾値を超えると（$\theta > \theta^*$）、増税（θの増加）により、経済成長率（市場利子率）rは低下する。

ただし、経済成長率（市場利子率）rを最大化する閾値$\theta = \theta^*$は、以下を満たす。

$$(4\text{-}9)\ \theta^* = \frac{1}{2\hat{r}}\left\{\frac{\hat{A}b(\rho + p)}{\hat{r}e} + (n - \rho)\right\}.$$

（証明）$\hat{r}$を求める(4-7)を所得税率θで全微分すると、

$$(4\text{-}10)\left\{\frac{\theta[2\theta\hat{r} - (n-\rho)]}{b(\rho + p)} + \frac{(1-\theta)\hat{A}}{[(\hat{r} - p) - \hat{A}]^2}\right\}\frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\frac{[2\theta\hat{r} - (n-\rho)]\hat{r}}{b(\rho + p)} + \frac{\hat{A}}{\hat{A} - (\hat{r} - p)}.$$

上記(4-10)の右辺に着目し、(4-5)も考慮しつつ、

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow -\frac{[2\theta\hat{r} - (n-\rho)]\hat{r}}{b(\rho + p)} + \frac{\hat{A}}{\hat{A} - (\hat{r} - p)} = -\frac{[2\theta\hat{r} - (n-\rho)]\hat{r}}{b(\rho + p)} + \frac{\hat{A}}{e} = 0$$

が導出されるが、これをθについて表すと、(4-9)がしたがう。（証明了）

（２）所得税率θの変更が土地の用途選択に及ぼす影響

対称定常均衡における両地域の産業用地及び住宅地の水準は、(3-3),(3-8)より、

$$(4\text{-}11)\ L_m = L_{mi} = L_{mj} = \frac{xB}{p\beta\hat{A}}[\hat{A}-(1-\mu)e], K = K_i = K_j = \frac{B}{p\alpha\hat{A}}(1-\mu)e.$$

上記(4-11)より、(4-5)を考慮しつつ、

$$(4\text{-}12)\ L_m + K = \frac{xB}{p\beta} + \frac{B}{p\hat{A}}\left(\frac{\beta - x\alpha}{\alpha\beta}\right)(1-\mu)(\hat{A}-r)$$

であり、かつ仮定 2-2 により $\beta > x\alpha$ であるから、定理 4-1 のもと、

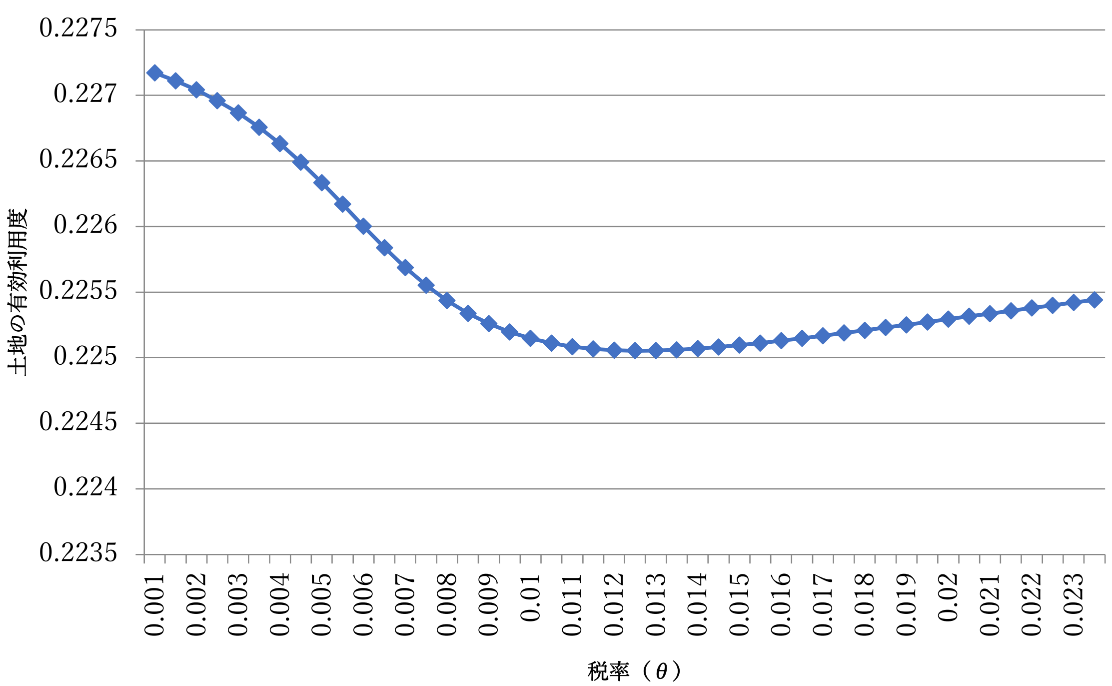
$$(4\text{-}13)\ \theta < \theta^* \Leftrightarrow \frac{d(L_m + K)}{d\theta} < 0, \theta \geq \theta^* \Leftrightarrow \frac{d(L_m + K)}{d\theta} > 0.$$

上記(4-13)は、θが定理 4-1 と同じ特定の値をとる場合、産業用地の住宅地の合計（有効利用されている土地の総量）は最小化されることを意味するが、この点を、定理 4-2 として提示する。

定理 4-2　所得税率θがある閾値$\theta = \theta^*$に達するまでの間（$\theta < \theta^*$）、増税（θの増加）により、有効利用されている土地の水準は低下する。しかるに、閾値を超えると（$\theta > \theta^*$）、増税により、有効利用されている土地の水準は高まる。

最後に土地の総量に占める有効利用されている土地の割合を土地有効利用度と定義し、先述した外生変数に加え、土地の総量を$L = 100$に設定し、数値解析により、税率θの変更に伴う土地有効利用度の推移について成したグラフを下記に提示する。

図2　所得税率の変更が土地の有効利用度に及ぼす影響



V　結論

社会資本ストックが持続的な経済成長の原動力となる奈良[2019]を、地域間の移住のルールを設定した上で二地域モデルに拡張し、分析を行った結果、2 つの地域に人口や社会資本ストックが均等に分布する対称定常均衡解に加え、それらが 2 つの地域に不均等に分布する非対称定常均衡が、分住均衡として存在し得ることがわかった。

上記のうち対称定常均衡解に着目し、社会資本整備の財源としての所得税率の変更が経済成長率や土地の用途選択に及ぼす影響に関する比較静学分析を行った結果、経済成長率については、奈良[2019]と同様、ある特定の税率のもとで最大化される一方、土地有効利用度については当該税率のもと最小化されることがわかり、この点において奈良[2019]とは逆の結論が導かれた。

本論の動学体系は複雑であり、分住均衡の動学的分析、つまり時間の経過に伴う対称定常均衡や非対称定常均衡に収束する経路の探索をなし得なかったがこの点を今後の課題の 1 つとする。

付録

付録 1．定理 3-1 の証明

はじめに、(2-45)の両辺を時点tで微分し、(2-50)を適用すると、

$$\dot{A}(t) = r(t)[q_{Li}(t)L_i + q_{Lj}(t)L_j]$$

が得られるが、これと(3-12)より、

(a-1)

$$\begin{aligned}&\theta[r(t)+p][q_{Li}(t)L_i + q_{Lj}(t)L_j] + \theta\{w_i(t)[N_{mi}(t)+N_{bi}(t)] + w_j(t)[N_{mj}(t)+N_{bj}(t)]\}\\&=[w_i(t)N_{mi}(t)+w_j(t)N_{mj}(t)]+[w_i(t)N_{bi}(t)+w_j(t)N_{bj}(t)]\\&-\mu[E_i(t)+E_j(t)]-(1-\mu)[E_i(t)+E_j(t)]+[\lambda_i(t)A_i(t)+\lambda_i(t)A_i(t)].\end{aligned}$$

上記(a-1)の左辺につき、(2-56a'),(2-56b')より、(2-45)も考慮し$\dot{G}_i(t)+p_2(t)\dot{G}_j(t)$に等しい。

また、(a-1)の右辺の第 1 項につき、(2-4'),(2-7a),(2-7b)より、

$$w_i(t)N_{mi}(t)+w_j(t)N_{mj}(t) = Y_{mi}(t)+p_2(t)Y_{mj}(t)-[\pi_{mi}(t)L_{mi}(t)+\pi_{mj}(t)L_{mj}(t)].$$

同様に、右辺の第 2 項につき、(2-9),(2-10a),(2-10b),(2-11)より、(2-58),(2-59)を考慮しつつ、

$$\begin{aligned}&w_i(t)N_{bi}(t)+w_j(t)N_{bj}(t)\\&=[p_{ki}(t)K_i(t)G_i(t)+p_{kj}(t)K_j(t)G_j(t)]+[\pi_{mi}(t)L_{mi}(t)+\pi_{mj}(t)L_{mj}(t)].\end{aligned}$$

さらに、(a-1)の右辺の第 3 項につき、$\phi=\Gamma^{1-\sigma}$を考慮し、(2-52),(2-53),(3-10)より、

$$\begin{aligned}&\mu E_i(t)+\mu E_j(t) = C_{i1}(t)+\Gamma C_{j1}(t)+p_2(t)\Gamma C_{i2}(t)+p_2(t)C_{j2}(t)\\&=[Y_{mi}(t)-\dot{G}_i(t)]+[p_2(t)Y_{mj}(t)-p_2(t)\dot{G}_j(t)].\end{aligned}$$

また、(a-1)の右辺の第 4 項につき、(3-6),(3-7a),(3-7b)より、

$$(1-\mu)E_i(t)+(1-\mu)E_j(t) = p_{ki}(t)K_i(t)G_i(t)+p_{kj}(t)K_j(t)G_j(t).$$

以上により、(a-1)は、

$$
\begin{aligned}
&\dot{G}_i(t)+p_2(t)\dot{G}_j(t)\\
&=Y_{mi}(t)+p_2(t)Y_{mj}(t)-[\pi_{mi}(t)L_{mi}(t)+\pi_{mj}(t)L_{mj}(t)]\\
&+[p_{ki}(t)K_i(t)G_i(t)+p_{kj}(t)K_j(t)G_j(t)]+[\pi_{mi}(t)L_{mi}(t)+\pi_{mj}(t)L_{mj}(t)]\\
&-[Y_{mi}(t)-\dot{G}_i(t)]-[p_2(t)Y_{mj}(t)-p_2(t)\dot{G}_j(t)]-[p_{ki}(t)K_i(t)G_i(t)+p_{kj}(t)K_j(t)G_j(t)]\\
&+[\lambda_i(t)A_i(t)+\lambda_i(t)A_i(t)]\\
&\Leftrightarrow \lambda_i(t)A_i(t)+\lambda_i(t)A_i(t)=0
\end{aligned}
$$

と計算され、(3-13)がしたがう。　(証明了)

付録 2.　補題 3-2 の証明

はじめに、証明を行う便宜上、以下の関数を定義する。

$$f(s,v)=\log e_i(s,v)-\log e_j(s,v)\,,$$

$$g(v)=\frac{\mu}{\sigma-1}\{\log[1+\phi p_2(v)^{1-\sigma}]-\log[\phi+p_2(v)^{1-\sigma}]\}+(1-\mu)\log p_2(v)\,.$$

このとき、(3-18)は、次のように書き換えることができる。

$$\text{(a-2)}\ \Delta u(s,t)=e^{(\rho+p)t}\int_t^\infty f(s,v)e^{-(\rho+p)v}dv+e^{(\rho+p)t}\int_t^\infty g(v)e^{-(\rho+p)v}dv.$$

上記(a-2)の右辺第 1 項を部分積分することにより、以下が得られる。

$$\int_t^\infty\left[\frac{df(s,v)e^{-(\rho+p)v}}{dv}\right]dv=\int_t^\infty e^{-(\rho+p)v}\frac{\partial f(s,v)}{\partial v}dv-(\rho+p)\int_t^\infty f(s,v)e^{-(\rho+p)v}dv\,.$$

上記により、

$$\text{(a-3)}\int_t^\infty f(s,v)e^{-(\rho+p)v}dv=\frac{1}{\rho+p}\left\{\int_t^\infty e^{-(\rho+p)v}\frac{\partial f(s,v)}{\partial v}dv-\Big[f(s,v)e^{-(\rho+p)v}\Big]_t^\infty\right\}.$$

上記(a-3)の右辺第 1 項につき、$f(s,v)$ の定義により、資本移動の完全性（$r_i(t)=r_j(t)=r(t)$）を考慮しつつ、オイラー方程式(2-23)を適用すると、

$$\frac{\partial f(s,v)}{\partial v}=\frac{1}{e_i(s,v)}\frac{\partial e_i(s,v)}{\partial v}-\frac{1}{e_j(s,v)}\frac{\partial e_j(s,v)}{\partial v}=0$$

であるから、これを(a-3)に適用し、整理すると、

$$\text{(a-3')}\int_t^\infty f(s,v)e^{-(\rho+p)v}dv=-\frac{1}{\rho+p}\Big[\{\log e_i(s,v)-\log e_j(s,v)\}e^{-(\rho+p)v}\Big]_t^\infty\,.$$

オイラー方程式(2-28a),(2-28b)より、資本移動の完全性（$r_i(t)=r_j(t)=r(t)$）を考慮し、

$$e_i(s,v)=e_i(s,s)\exp\left\{\int_s^v[(1-\theta)r(\mu)-\rho-\theta p]d\mu\right\},e_j(s,v)=e_j(s,s)\exp\left\{\int_s^v[(1-\theta)r(\mu)-\rho-\theta p]d\mu\right\}$$

であるから、終端時点T の極限をとると、以下が成立する。

$$\lim_{T\to\infty}\{\log e_i(s,T)-\log e_j(s,T)\}e^{-(\rho+p)T}=\lim_{T\to\infty}\{\log e_i(s,s)-\log e_j(s,s)\}e^{-(\rho+p)T}=0.$$

よって、

$$\Big[\{\log e_i(s,v)-\log e_j(s,v)\}e^{-(\rho+p)v}\Big]_t^{\infty}=-\{\log e_i(s,t)-\log e_j(s,t)\}e^{-(\rho+p)t}$$

が計算されるから、これを(a-3')に適用し、(a-2)に戻すとただちに(3-22)がしたがう。　（証明了）

参考文献

[1]Baldwin,R.E.[2001]"The Core-Periphery Model with Forward-Looking Expectations," *Regional Science and Urban Economics* 31,21-49.

[2]Blanchard, O. J. [1985] "Debt, Deficits, and Finite Horizons," *Journal of Political Economy*, 93, 223–247.

[3]Diamond,P.A.[1965]"National Debt in a Neoclassical Growth Model," *American Economic Review* 55,1126-1150.

[4]Dixit A.K.and Stiglitz J.E. [1977] "Monopolistic competition and optimum product diversity," *American Economic Review* 67, 297-308.

[5]Futagami, K. and Morita, Y. and Shibata, A. [1993]"Dynamic Analysis of an Endogenous Growth Model with Public Capital,"*Scandinavian Journal of Economics* 95,607-625.

[6]Ito.R.[2010]"Economic Development and Non-Monotonic Spatial Transitions," *The Japanese Economic Review* 61,234-251.

[7]Krugman,P.[1991],"Increasing Returns and Economic Geography," *Journal of Political Economy* 99,483-499.

[8]奈良　卓[2016]「税収配分が地域間人口分布と土地利用に及ぼす影響」『八戸学院大学紀要』52,1-27.

[9]奈良　卓[2019]「社会資本が土地利用と経済成長に及ぼす影響」『八戸学院大学紀要』58,1-23.

[10]野口悠紀雄[1985]「土地課税が都市的土地利用に与える影響」『経済研究』36,15-22.

[11]Ottaviano.G.and Thisse.J.[2004]"Agglomeration and economic geography,"*Handbook of Regional and urban economics* 4,2563-2608.

執筆者紹介（所属）

奈良　卓 八戸学院大学 地域経営学科 教授