

社会資本が土地利用と経済成長に及ぼす影響

—多様性選好と持続的経済成長—

奈良 卓

要旨

奈良[2021]で構築した枠組みに新たな仮定、すなわち、社会資本ストックの蓄積が土地生産性のみならず、労働生産性をも高めるようなメカニズムを導入することにより、拡張し、そのもと、社会資本建設の財源たる所得税の増税が、総消費の社会資本ストックに対する比率等の主要な変数、また、土地の有効利用度や経済成長率に及ぼす影響を分析した。

分析の結果、定常状態における経済成長率は人口成長率を上回るものの、税率によらず一定の値であるため、総消費の社会資本ストック比率、土地の有効利用度ともに、増税により低下することがわかった。さらに、本論においても奈良[2021]と同様、定常的成長均衡に至る解経路が無数に存在し、一意に定まらない不決定性が生じることとも判明した。

キーワード：重複世代モデル、独占的競争、多様性選好、社会資本、土地の有効利用、持続的経済成長、均衡の不決定性。

I 序論

奈良[2021]では、簡単化のため、人や企業の地域間の移動が存在しない閉鎖体系を想定しつつ、奈良[2019]で構築された Blanchard[1985]型の重複世代モデルに、Dixit and Stiglitz[1977]の独占的競争に基づく多様性選好の枠組みを融合するという新たな発想に基づくモデルを構築し、各種分析を行った。

具体的に、奈良[2019]における遊休地も含む土地の用途選択が、各時点における家計の意思決定によってなされ、かつストックとしての社会資本が経済成長の原動力となり得る動学的な枠組みを維持しつつも、独占的競争のもと、多くの企業によって多種多様な財が生産され、それらは家計による消費の対象とな

るのみならず、政府による社会資本建設の資材としても利用されるような状況を想定し、そのもとで、社会資本建設の財源としての所得税の増税により、社会資本の水準、地価、土地の有効利用度¹及び社会的厚生に及ぼす影響を与えるかにつき、1人当たり (per capita) 消費支出、1人当たり社会資本ストック、効率単位で測った地価、市場利子率が長期的に一定の値に収束する定常的成長均衡に焦点を合わせ、比較静学分析により、検証した。

また、比較静学分析に先立ち、すべての変数が長期的に一定の率で変化する状態に収束し、そのもとで達成される定常的成長均衡に至る解経路が一意に決定され得るか否か、動学的な安定性に関する詳細な分析を行った。

¹ 土地の有効利用度とは、すべての土地に占める、生産要素としてまたは居住用として利用される土地の割合を意味するが、生産的な用途に利用される土地と投

機目的に所有される土地 (遊休地) が共存し、それにより、土地の用途選択を分析することが可能な枠組みは、野口[1985]の発想に立脚するものである。

分析の結果、増税により、定常的成長均衡における 1 人当たり社会資本の水準が増大し、多様財の種類数（企業数）の対人口比率が増大する一方、経済成長率が外生的な人口増加率に制約されるがゆえに、1 人当たり消費支出が減少することがわかった。また、増税により、土地の有効利用度は低下し、地価が下落するとともに長期的視点で見た社会的厚生については、所得税率がある閾値に達するまで増大し、閾値を超えると減少することがわかった。

しかるに、定常的成長均衡に至る解経路、すなわち、2 つの非先決変数（1 人当たり消費支出と地価）の初期値の組み合わせが無数に存在するという、動学的な意味での不決定性の問題が生じることが判明した。

奈良[2021]の意義は、将来的な 2 地域モデルへの拡張も想定し、Dixit and Stiglitz[1977]の独占的競争に基づく多様性選好の発想を組み入れるとともに、多様財が、消費財として利用されるのみならず、経済成長の原動力となり得る社会資本ストックを建設するための資材として投入されるメカニズムを組み入れた点、また、多様性選好の導入により、モデルの展開を容易にし、所得税の増税が土地利用のあり方に加え、社会的厚生に及ぼす影響、及び動学の両面において、解析的に精緻な分析を行うことができた点である。

上記のうち、多様財が経済成長の原動力となる点につき、Grossman and Helpman[1991]は、多様財としての中間投入財が消費財の生産に投入される枠組みに、また、Romer[1990]は、中間投入財が資本財の生産に投入される枠組みに、それぞれ、立脚しており、いずれも、R&D 活動に基づく中間投入財の種類数の増加が、持続的経済成長を生起する要因となっていた。

これらの先行研究に対し、奈良[2021]では、多様財がストックとしての社会資本建設の資材として利用され、社会資本ストックがもたらす技術的外部効果が、生産要素及び居住用として利用される土地の生産性を高め、これ

により、R&D 活動のような多様財の種類数を能動的に増加させるメカニズムがなくとも、人口成長に等しい経済成長を可能としていた。

奈良[2021]の意義のうち、動学分析の精緻化につき、奈良[2021]における定常状態が、企業数（多様材の種類数）や消費支出が、時間を通じ、人口と同一の率で成長する状態である点については、冒頭でも述べたとおりであるが、かかる状態を可能にしたのは、先述のように、土地が多様財の生産や居住目的に利用される前提のもと、社会資本ストックの蓄積が土地の生産性を高め、その結果、物理単位で測った土地の水準が不変であることが、経済成長のボトルネックとなるような状態を回避することができたからである。

しかるに、物的資本の存在を想定しないのであれば、なおさら、社会資本ストックの蓄積が生産要素の 1 つである土地生産性の向上のみに寄与するという前提は、いかにも不自然であり、この点が奈良[2021]の改善すべき課題の 1 つである。

この点に関し、Barro[1990]、Barro and Sala-i-Martin[1992]については、フローの政府支出が、また、Futagami and Morita and Shibata [1993]についてはストックとしての社会資本が、労働、物的資本といったモデルに存在するすべての生産要素の生産性を高め、持続的な経済成長、つまり、人口成長を上回る経済成長の原動力となるようなメカニズムを想定していた。

この論文の目的は、奈良[2021]の枠組みに、社会資本ストックの蓄積が土地生産性のみならず労働生産性をも高めるようなメカニズムを導入することにより、モデルの拡張を図り、そのもと、各種の分析を行うことである。

より具体的に、社会資本ストックの蓄積が、効率単位で測った土地の水準のみならず、効率単位で測った労働力の水準をも増大させ、その結果、外生変数である出生率から死亡率を差し引いた人口成長率を上回る持続的な経済成長が可能であるような枠組みに拡張する。

上記のもと、効率単位で測った土地及び労働力の水準、企業数（多様材の種類数）、消費水準が、時間の経過とともに、社会資本ストックの蓄積と同一の率で増加するような定常状態が達成されるが、そのもとで、社会資本整備の財源たる所得税率の引き上げにより、定常状態における総資産、総消費、効率単位で測った労働力、それぞれの対社会資本ストック比率がいかなる影響を受けるかを分析する。また、それらの結果を踏まえ、経済成長率、さらに、土地有効利用度がいかなる影響を受けるかを分析するとともに、定常的成長均衡解の動学的安定性を解明することを、この論文の目的とする。

本論の次章以降の構成を説明する。

次のIIでは、Blanchard[1985]型の世代モデルとDixit-Stiglitz[1977]を融合し、構築した奈良モデル[2021]に、社会資本ストックの蓄積が、効率単位で測った土地のみならず効率単位で測った労働力を増大させる枠組みを導入し、それにより、人口成長率を上回る経済成長を可能にするプロセスを説明する。

IIIでは、IIをもとに、モデルを、その根幹となる複数の微分方程式体系に集約し、整理し、それらを用い、定常状態の動学的安定性、すなわち、定常的成長均衡解に至る経路が一意的に決定され得るかを検討する。

IVの前半では、増税に関する比較静学分析を行う。具体的に、増税（所得税率の上昇）が、総資産、総消費、効率単位で測った労働力それぞれの対社会資本ストック比率、経済成長率や土地有効利用度に及ぼす影響を分析する。

奈良[2021]とは異なり、本論においては、増税が長期的効用にいかなる影響を及ぼすか、いわゆる社会的厚生に関する分析を実施することは不可能であるが、IVの後半でその理由を述べる。

最後のVでは、本論で得られた分析結果を整理し、今後の課題を述べる。

II モデル

1. 人口分布と生命保険

奈良[2021]と同様、自給自足の閉鎖的な社会を想定するとともに、Blanchard[1985]型の重複世代モデルの枠組みに依拠し、各人の寿命が x 以上である確率 $P(X \geq x)$ が、指数分布にしたがうことを仮定する。

このとき、各個人が任意の時点 x において生存している確率密度関数 $f(x)$ は、

$$(2-1) f(x) = pe^{-px}$$

と表され、各個人の単位期間当たり死亡確率は p となる。また、当該期の人口に対する出生者数の割合である出生率を b とおくと、時点 t における総人口 $N(t)$ は、時点0における総人口 $N(0)$ 、 $n = b - p$ のもと、

$$(2-2) N(t) = N(0)e^{nt}$$

上記 $N(t)$ は、時点 s に生まれた世代の時点 t における人口 $N(s, t)$ を、時点 t に生存する全世代について集計した値である。すなわち、

$$(2-3) \int_{-\infty}^t N(s, t) ds = \int_{-\infty}^t N(s, s) e^{-p(t-s)} ds = N(t)$$

であり、(2-2),(2-3)の両辺を t で微分すると、

$$(2-4) \dot{N}(t) / N(t) = n.$$

次に、奈良[2021]と同様、各家計が、子孫に遺産も負債を遺さないよう、私的な生命保険の市場の存在を仮定し、各家計は、生前に配当を受ける見返りに、その死に際し、すべての資産を生命保険会社に譲渡することを仮定する。

このとき、時点 t において、 $a(t)$ の資産を保有する各家計が生命保険会社から受け取る配当は、 $pa(t)$ である。すなわち、奈良[2021]と同様、配当率は死亡率に等しい値となる。

2. 家計の行動

- (1) 家計による効用最大化
- 1) 1 時点における効用最大化

a. 効用関数

時点 s に生まれた各家計は、時点 t において $M(t)$ 種類の多様財と住宅サービスを消費し、効用を得る。家計の効用関数と関連する式は、以下のように表される。

(2-5)

$$U(Q(s,t), k^*(s,t)) = \frac{Q(s,t)^\mu k^*(s,t)^{1-\mu}}{\mu^\mu (1-\mu)^{1-\mu}},$$

$$0 < \mu < 1,$$

(2-6a)

$$Q(s,t) = \left[\int_0^{M(t)} \hat{q}(j,s,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \sigma > 1,$$

$$(2-6b) k^*(s,t) = G(t)k(s,t).$$

上記(2-5)のうち、 $Q(s,t)$ は、各家計が t において消費する合成された多様財の水準であり、 $k^*(s,t)$ は、効率単位で測った住宅地が生み出す 1 家計当たり住宅サービスの消費を表す。

また、(2-6a)における $\hat{q}(j,s,t)$ は、時点 t において各家計が消費する j 番目の多様財の消費水準であり、(2-6b)における $k(s,t)$ は物理単位の住宅地が生む住宅サービスを意味する。

ここに $G(t)$ は時点 t において利用可能な社会資本ストックの水準であり、 $G(t)$ の蓄積により、土地の利用技術が進歩し、住宅地を含む各用途に利用される効率単位で測った土地の水準が増加することとなるとともに、本論では、労働生産性を高める役割も果たす。

b. 効用最大化第 1 段階

各時点 t において s 期生まれの家計は、支出総額 $e(s,t)$ の制約のもと、(2-5)の効用を最大にするよう、 $Q(s,t)$ 及び $k^*(s,t)$ を決定する。

ゆえに、時点 t における効用最大化問題は、 $P(t)$ を多様財の物価指数、 $p_k(t)$ を効率単位で測った住宅サービスの価格として、以下の (P1) のように表される。

(P1)

$$\max_{Q(s,t), k^*(s,t)} U(Q(s,t), k^*(s,t)) = \frac{Q(s,t)^\mu k^*(s,t)^{1-\mu}}{\mu^\mu (1-\mu)^{1-\mu}},$$

$$s.t. P(t)Q(s,t) + p_k(t)k^*(s,t) = e(s,t).$$

ここに、 $p(j,t)$ を時点 t において各家計が消費する j 番目の多様財の価格とし、次を得る。

$$(2-7) P(t)Q(s,t) = \int_0^{M(t)} p(j,t)\hat{q}(j,s,t) dj.$$

効用最大化の 1 階条件は、

$$(2-8a) P(t)Q(s,t) = \mu e(s,t),,$$

$$(2-8b) p_k(t)k^*(s,t) = (1-\mu)e(s,t).$$

c. 効用最大化第 2 段階と価格指数

次に、各家計は、(2-7),(2-8a)の制約のもと、 $p(j,t)$ を所与とし、(2-6a)を最大化するよう、 j 番目の多様財の水準 $\hat{q}(j,s,t)$ を選択することから、第 2 段階の効用最大化問題は、以下の (P2) のように表される。

$$(P2) \max_{\hat{q}(j,s,t)} \left[\int_0^{M(t)} \hat{q}(j,s,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

$$s.t. \int_0^{M(t)} p(j,t)\hat{q}(j,s,t) dj = \mu e(s,t).$$

効用最大化の 1 階条件により、以下のマッシュタルの需要関数を導き出すことができる。

$$(2-9) \hat{q}(j,s,t) = p(j,t)^{-\sigma} P(t)^{\sigma-1} \mu e(s,t).$$

上記(2-9)の両辺に $p(j,t)$ を乗じ、区間 $[0, M(t)]$ で積分すると、以下が得られる。

$$(2-10) P(t) = \left[\int_0^{M(t)} p(j,t)^{1-\sigma} dj \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

d. 間接効用関数

さらに、(2-8a),(2-8b),(2-9),(2-10)を(2-5)に適用し、以下の間接効用関数が得られる。

(2-11)

$$\begin{aligned} V(P(t), p_k(t), e(s,t)) \\ = P(t)^{-\mu} p_k(t)^{-(1-\mu)} e(s,t) = \frac{e(s,t)}{P(t)^\mu p_k(t)^{1-\mu}}. \end{aligned}$$

上記(2-11)の対数を取ると、以下が得られる。(2-11')

$$\begin{aligned} \log V(P(t), p_k(t), e(s,t)) \\ = \log e(s,t) - \mu \log P(t) - (1-\mu) \log p_k(t). \end{aligned}$$

2) 生涯効用最大化

s 期生まれの代表的家計の t 時点における消費支出の水準 $e(s,t)$ につき、同世代が任意の t 時点に直面する生涯効用関数 $U(e(s,t))$ は、各人の死亡確率が p であることを考慮し、世代間の割引率 $\rho > 0$ のもと、奈良[2021]と同様、次のように表される。

(2-12)

$$U(e(s,t)) = \int_t^\infty \log e(s,v) e^{-(\rho+p)(v-t)} dv.$$

s 期生まれの家計が t 時点に所有する非人的資産を $a(s,t)$ 、稼得する労働所得を $\hat{w}(s,t)$ とおく。この $\hat{w}(s,t)$ は、 s 期生まれの家計が t 期に提供する物理単位で測った労働力 1 単位に対し支払われる労働賃金率でもある。

また、市場利子率を $r(t)$ 、所得税率を θ とおくと、家計の予算制約式は、

$$(2-13) \frac{da(s,t)}{dt} = (1-\theta)[r(t) + p]a(s,t) + (1-\theta)\hat{w}(s,t) - e(s,t)$$

であり、家計の最適化問題は、(2-13)のもと、生涯効用(2-12)を最大化することである。

最適化の必要条件として、オイラー方程式、N.P.G.条件は、それぞれ、

(2-14)

$$\frac{de(s,t)}{dt} = [(1-\theta)r(t) - \rho - \theta p]e(s,t),$$

(2-15)

$$\lim_{v \rightarrow \infty} a(s,v) \exp \left(- \int_t^v (1-\theta)(r(\mu) + p) d\mu \right) = 0.$$

ここに、 s 期生まれ代表的家計の t 期における人的資産 (human wealth) $h(s,t)$ は、生涯にわたって得る労働賃金の割引現在価値の合計であり、次の(2-16)のように表される。

(2-16)

$$\begin{aligned} h(s,t) \\ = \int_t^\infty (1-\theta)\hat{w}(s,v) \exp \left\{ -(1-\theta) \int_t^v [r(\mu) + p] d\mu \right\} dv. \end{aligned}$$

上記(2-16)に、オイラー方程式(2-14)及びN.P.G.条件(2-15)を適用すると、

(2-17)

$$\begin{aligned} \int_t^\infty e(s,v) \exp \left(-(1-\theta) \int_t^v [r(\mu) + p] d\mu \right) dv \\ = a(s,t) + h(s,t). \end{aligned}$$

また、以下のN.P.G.条件が成立する。

(2-18)

$$\lim_{v \rightarrow \infty} e(s,v) \exp \left(-(1-\theta) \int_t^v [r(\mu) + p] d\mu \right) = 0.$$

以上、(2-17),(2-18)にオイラー方程式(2-14)を適用し、奈良[2021]と同様、以下が得られる。

$$(2-19) e(s,t) = (\rho + p)[a(s,t) + h(s,t)].$$

(2) 集計と微分方程式

s 期生まれの家計が t 期に所有する非人的資産 $a(s, t)$ 、人的資産 $h(s, t)$ 、消費支出の水準 $e(s, t)$ を、それぞれ、生存する全世代について集計した値を $A(t), H(t), E(t)$ とおくと、

$$(2-20) \quad \begin{aligned} A(t) &= \int_{-\infty}^t a(s, t) N(s, t) ds \\ &= \int_{-\infty}^t a(s, t) N(s, s) e^{-p(t-s)} ds, \end{aligned}$$

$$(2-21) \quad \begin{aligned} H(t) &= \int_{-\infty}^t h(s, t) N(s, t) ds \\ &= \int_{-\infty}^t h(s, t) N(s, s) e^{-p(t-s)} ds, \end{aligned}$$

$$(2-22) \quad \begin{aligned} E(t) &= \int_{-\infty}^t e(s, t) N(s, t) ds \\ &= \int_{-\infty}^t e(s, t) N(s, s) e^{-p(t-s)} ds. \end{aligned}$$

ここで、社会資本ストックの水準 $G(t)$ に連動し、労働生産性が高まることを仮定し、効率単位で測った労働力を $N^*(t) \equiv G(t)^\eta N(t)$

($0 < \eta < 1$) とおく。次に s 期生まれの家計が t 期に提供する効率単位で測った単位当たり労働力に対し、支払われる労働賃金率を $w(s, t)$ とおくと、先に定義した物理単位で測った単位当たり労働賃金率との関係において、

$$\hat{w}(s, t) = G(t)^\eta w(s, t).$$

このとき、労働賃金は誕生時点に関わらず等しく分配されること ($\hat{w}(s, v) = \hat{w}(v)$) を仮定し、(2-3)を考慮しつつ、(2-21)に(2-16)を適用すると、次の(2-23)が導出される。

$$H(t) = N(t) \int_t^\infty (1-\theta) \hat{w}(v) \cdot$$

(2-23)

$$\exp \left\{ -(1-\theta) \int_t^v [r(\mu) + p] d\mu \right\} dv.$$

ところで、(2-19)を各時点の総人口で集計し、(2-20)~(2-22)を適用すると、次の(2-24)を得る。

$$(2-24) \quad E(t) = (\rho + p)[A(t) + H(t)].$$

また、(2-4)及び $\hat{w}(t) = G(t)^\eta w(t)$ を考慮しつつ、(2-23) の両辺を時間 t で微分すると、

$$(2-25) \quad \begin{aligned} \dot{H}(t) &= \{n + (1-\theta)[r(t) + p]\} H(t) \\ &\quad - (1-\theta)w(t)N^*(t). \end{aligned}$$

さらに、本論においても、奈良[2021]と同様、

$$(2-26) \quad \begin{aligned} \dot{A}(t) &= N(t, t)a(t, t) - pA(t) \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \frac{da(s, t)}{dt} N(s, s) e^{-p(t-s)} ds. \end{aligned}$$

しかるに(2-26)に関し、重複世代モデルの前提より、誕生の時点で資産を保有していないこと ($a(t, t) = 0$) に加え、 $\hat{w}(s, t) = \hat{w}(t)$ を考慮し、(2-26)に(2-13)を適用すると、

$$(2-27) \quad \begin{aligned} \dot{A}(t) &= \{(1-\theta)[r(t) + p] - p\} A(t) \\ &\quad + (1-\theta)w(t)N^*(t) - E(t). \end{aligned}$$

また、(2-24)の両辺を時間 t で微分し、(2-24)を考慮しつつ、(2-25)及び(2-27)を適用すると、

$$(2-28) \quad \begin{aligned} \dot{E}(t) &= \{n + (1-\theta)[r(t) + p] - (\rho + p)\} E(t) \\ &\quad - b(\rho + p)A(t). \end{aligned}$$

3. 政府の行動

政府は、家計から徴収した税金をもとに、 $M(t)$ 種類の多様財を組み合わせて、時点 t において $\dot{G}(t)$ の新たな社会資本を生産する。

はじめに、時点 t の税収 $T(t)$ は、効率単位の労働力が $N^*(t) = G(t)^\eta N(t)$ であるから、

(2-29)

$$T(t) = \theta[w(t)N^*(t) + (r(t) + p)A(t)].$$

次に、 $\hat{q}_G(j, t)$ を時点 t において公共財の生産に投入される j 番目の財であると設定し、新たな社会資本の生産関数は、以下の(2-30)のように表されるものとする。

(2-30)

$$\dot{G}(t) = \left[\int_0^{M(t)} \hat{q}_G(j, t) \frac{\sigma-1}{\sigma} dj \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} M(t)^{-\frac{1}{\sigma-1}}.$$

以上により、政府が直面する最適化問題は、

$$(P3) \max_{\hat{q}_G(j, t)} \left[\int_0^{M(t)} \hat{q}_G(j, t) \frac{\sigma-1}{\sigma} dj \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} M(t)^{-\frac{1}{\sigma-1}},$$

$$s.t. \int_0^{M(t)} p(j, t) \hat{q}_G(j, t) dj = T(t).$$

政府は、限られた税収 $T(t)$ のもと、公共財の生産を最大化できるよう、 $\hat{q}_G(j, t)$ を選択するが、最大化の1階条件により、以下の政府による需要関数が導出される（付録1参照）。

$$(2-31) \hat{q}_G(j, t) = p(j, t)^{-\sigma} P(t)^{\sigma-1} T(t).$$

4. 企業の行動

(1) 多様財部門

奈良[2021]と同様、多様財部門は独占的競争に、土地利用転換サービス部門は完全競争に、それぞれに基づき、生産活動を行うことを想定するが、多様財部門は、労働力を用い、消費財及び社会資本建設に用いる資材を生産する。

時点 t における j 番目の財の生産量 $q(j, t)$ は、家計による需要と政府による需要の合計

であるから、(2-22),(2-29)を考慮しつつ、(2-9)を全人口で集計した式に(2-31)を足し合わせ、

$$q(j, t)$$

$$= p(j, t)^{-\sigma} P(t)^{\sigma-1}.$$

$$\left\{ \mu E(t) + \theta[w(t)N^*(t) + (r(t) + p)A(t)] \right\}.$$

1単位の各多様財の生産に、1単位の効率単位で測った労働力が可変的生産要素として、また、 f 単位の効率単位で測った土地が固定的生産要素として必要であることを仮定する。

このとき、 j 番目の財を生産する多様財企業の利潤を表す式は、効率単位で測った土地1単位の地代を $\pi(t)$ とすると、

(2-33)

$$\begin{aligned} \Pi(q(j, t)) &= p(j, t)q(j, t) - w(t)q(j, t) - \pi(t)f. \end{aligned}$$

利潤最大化の1階条件により、

$$(2-34) p(j, t) = \frac{\sigma}{\sigma-1} w(t) \equiv p(t).$$

このとき、(2-10),(2-34)より、

$$(2-35) P(t) = M(t)^{\frac{1}{1-\sigma}} p(t).$$

また、(2-32)に(2-35)を適用し、

$$q(j, t)$$

$$= \frac{\mu E(t) + \theta[w(t)N^*(t) + (r(t) + p)A(t)]}{M(t)p(t)} \equiv q(t).$$

さらに、(2-34),(2-36)を(2-33)に代入すると、

$$\Pi(q(t)) = \frac{1}{\sigma} p(t)q(t) - \pi(t)f$$

が得られるが、自由参入、退出の仮定により、均衡では超過利潤がゼロになることから、

(2-37)

$$\pi(t) = \frac{\mu E(t) + \theta[w(t)N^*(t) + (r(t) + p)A(t)]}{\sigma f M(t)}.$$

ここで多様財を価値基準材 (numeraire) とし、その価格を 1 とおくと ($p(t)=1$)、(2-34)~(2-37)は、次のように書き換えることができる。

$$(2-34') w(t) = \frac{\sigma - 1}{\sigma} \equiv w,$$

$$(2-35') P(t) = M(t)^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

$$(2-36')$$

$$q(t) = \frac{\mu E(t) + \theta[wG(t)^{\eta} N(t) + (r(t) + p)A(t)]}{M(t)},$$

$$(2-37')$$

$$\pi(t) = \frac{\mu E(t) + \theta[wG(t)^{\eta} N(t) + (r(t) + p)A(t)]}{\sigma fM(t)}.$$

(2) 土地利用転換サービス部門

労働のみを用い、土地利用転換サービスを行うことを仮定し、 $Y_b(t)$ をサービスの水準、

$N_b(t)$ を土地利用転換サービスの生産に投入する効率単位で測った労働力の水準とすると、

$$(2-38) Y_b(t) = BN_b(t).$$

また、土地利用転換サービスの価格を $p_b(t)$ 、土地利用転換部門の労働賃金率を $w_b(t)$ とおくと同部門の利潤は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \Pi_b(N_b(t)) &= p_b(t)Y_b(t) - w_b(t)N_b(t) \\ &= [Bp_b(t) - w_b(t)]N_b(t). \end{aligned}$$

完全競争市場における自由参入・退出の仮定のもと、サービスの生産量が正になるには、

$$(2-39) w_b(t) = Bp_b(t).$$

ここに土地利用転換サービス部門に投入される用途別の労働力につき、次の仮定をおく。

①住宅用地の利用転換：用地 1 単位 (効率単位) 当たり α 単位の利用転換サービス

②多様財企業用地の利用転換：用地 1 単位 (効率単位) 当たり β 単位の利用転換サービス
ただし、②につき、 $\beta > \alpha$ を仮定する。

$K(t)$ を物理単位で測った住宅用地の水準、 $K^*(t)$ を効率単位で測ったそれとおくと、各期における死亡率が p であることから、

$$(2-40) Y_b(t) = p[\alpha K^*(t) + \beta fM(t)],$$

$$(2-41)$$

$$K^*(t) = \int_{-\infty}^t k^*(s, t) N(s, t) ds = G(t)K(t).$$

以上、(2-38)~(2-41)により、

$$\begin{aligned} (2-42) \quad N_b(t) &= \frac{p}{B}[\alpha K^*(t) + \beta fM(t)] \\ &= \frac{p}{B}[\alpha G(t)K(t) + \beta fM(t)]. \end{aligned}$$

5. 市場均衡

(1) 労働市場

すべての労働力は、多様財部門、土地利用転換部門のいずれかに雇用されるから、多様財部門に雇用される効率単位で測った労働力を

$N_m(t)$ とおくと、1 単位の各多様財の生産に、1 単位の労働力を用いること、また多様財企業数が $M(t)$ であること、さらに、(2-36')より、

$$\begin{aligned} (2-43) \quad N_m(t) &= M(t)q(t) \\ &= \mu E(t) + \theta[wG(t)^{\eta+1} N(t) + (r(t) + p)A(t)]. \end{aligned}$$

労働市場の需給均衡式は、(2-42),(2-43)より、

$$\begin{aligned} (2-44) \quad \mu E(t) + \theta[wG(t)^{\eta+1} N(t) + (r(t) + p)A(t)] \\ + \frac{p}{B}[\alpha G(t)K(t) + \beta fM(t)] = G(t)^{\eta} N(t). \end{aligned}$$

また、労働市場の裁定により、多様財部門と土地利用転換サービス部門における労働賃金率が等しくなることから、(2-34'),(2-39)より、

$$(2-45) p_b(t) = \frac{w_b(t)}{B} = \frac{\sigma - 1}{\sigma B} = \frac{w}{B}.$$

(2) 土地市場

物理単位で測った土地の水準を L 、効率単位で測った水準を $L^*(t)$ 、また、遊休地の物理単位、効率単位の水準を、それぞれ $L_v(t)$ 、 $L_v^*(t)$

とすると土地市場の需給均衡式は、

(2-46)

$$K^*(t) + fM(t) + L_v^*(t) = L^*(t) = G(t)L,$$

$$L_v^*(t) = G(t)L_v(t).$$

ただし、各人の各期における死亡率が p であるから、多様財企業用地、住宅地、遊休地、それぞれの取引の対象となる土地の用地全体に占める割合の期待値も p である。ゆえに、

$$(2-47) \begin{aligned} \tilde{L}_m^*(t) &= pfM(t), \tilde{K}^*(t) = pK^*(t), \\ \tilde{L}_v^*(t) &= pL_v^*(t). \end{aligned}$$

(3) 資産市場

1) 資産市場における需給均衡

各家計は完全予見のもと、3種類の土地(多様財企業用地、住宅地及び遊休地)のいずれかを選択し、資産市場で運用する。ただし、生産的用途に利用される土地については、売却に先立ち、全て更地に転換されることから、取引が行われる際、遊休地と同一の価格が適用されることになる。よって、物理単位、効率単位の地価をそれぞれ $\hat{q}_L(t)$ 、 $q_L(t)$ とおくと資産市場の需給均衡式は、

(2-48)

$$A(t) = \hat{q}_L(t)L = q_L(t)G(t)L = q_L(t)L^*(t).$$

2) 資産市場における裁定条件

ここでは、完全予見のもと、資産市場における裁定条件として、a.預金等と多様財企業用地、b.預金等と住宅用地、c.多様財企業用地、住宅用地と遊休地、の3通りの組み合わせにおいて得られる収益率が互いに等しくなる条件(裁定条件)を、それぞれ考察することとする。

a.預金等と多様財企業用地の運用

初期(第 t 期)に $\hat{q}_L(t)$ の資金を土地(多様財企業用地:物理単位で計測)の購入に充てるか、預金するかを選択に直面する家計の資産裁定式を、次のような積分形式で示す。

(2-49)

$$\hat{q}_L(t) = \int_t^\infty \exp\left\{-\int_t^v r(\mu)d\mu\right\} \cdot [\pi(v)G(v) - p\beta p_b(v)G(v)]dv.$$

上記における $p\beta p_b(v)G(v)$ は、多様財企業用地を購入した家計が、死亡時を想定し、各期に支払う土地利用転換費用である。

また、(2-49)の両辺を微分すると、

$$(2-49') r(t) = \frac{\dot{\hat{q}}_L(t) + \pi(t)G(t) - p\beta p_b(t)G(t)}{\hat{q}_L(t)}.$$

b.預金等と住宅用地の運用

この点につき、(2-49)と同様に、積分形式で表すと、

(2-50)

$$\hat{q}_L(t) = \int_t^\infty \exp\left\{-\int_t^v r(\mu)d\mu\right\} [p_k(v)G(v) - p\alpha p_b(v)G(v)]dv.$$

上記(2-50)の両辺を微分すると、

(2-50')

$$r(t) = \frac{\dot{\hat{q}}_L(t) + p_k(t)G(t) - p\alpha p_b(t)G(t)}{\hat{q}_L(t)}.$$

c. 多様財企業用地、住宅用地と遊休地の運用
生産的用途に用いる土地か遊休地の選択に
直面する家計の資産裁定式は、

$$(2-51) \pi(t) = p\beta p_b(t),$$

$$(2-52) p_k(t) = p\alpha p_b(t).$$

最後に、(2-51)及び(2-52)を、それぞれ、(2-49')
及び(2-50')に適用し、次の(2-53)が得られる。

$$(2-53) r(t) = \frac{\dot{\hat{q}}_L(t)}{\hat{q}_L(t)}.$$

III 定常的成長均衡の動学的安定性

1. 動学体系の構築

(1) 定常的成長均衡のあり方と変数の定義
本論における定常的成長均衡は、総資産
 $A(t)$ 、総消費支出 $E(t)$ 、及び効率単位で測つ

た労働力 $N^*(t) = G(t)^\eta N(t)$ 、多様財企業数
 $M(t)$ が社会資本ストック $G(t)$ と同一の率で
成長することであり、そこでは、社会資本 1 単
位当たりの諸変数が、時間を通じ一定となる。

このとき、物理単位の地価 $\hat{q}_L(t)$ も $G(t)$ と
同一の率で上昇し、よって、効率単位の地価
 $q_L(t)$ は時間を通じ、一定となる。

上記を想定し、新たな変数を定義する。

$$a(t) \equiv A(t) / G(t), e(t) \equiv E(t) / G(t),$$

$$v(t) \equiv N^*(t) / G(t) = G(t)^{\eta-1} N(t),$$

$$m(t) \equiv M(t) / G(t).$$

このとき、(2-48)より、

$$(3-1) a(t) = q_L(t)L.$$

(2) 方程式体系の集約

ここに、(2-45),(2-51)より、同様に(2-45),(2-52)
より、それぞれ、

$$(3-2a) \pi(t) = \frac{wp\beta}{B},$$

$$(3-2b) p_k(t) = \frac{wp\alpha}{B}.$$

また、(3-2a)を(2-37')に適用し、(2-34')を考慮
しつつ変数を置き換えると、

$$(3-3) \begin{aligned} & \mu e(t) + \theta[wv(t) + (r(t) + p)a(t)] \\ & = \frac{f(\sigma - 1)p\beta}{B} m(t). \end{aligned}$$

さらに、(2-44)の両辺を $G(t)$ で除し、(2-34')
を考慮しつつ変数を置き換えると、

$$(3-4) \begin{aligned} & \mu e(t) + \theta[wv(t) + (r(t) + p)a(t)] \\ & + \frac{p}{B} [\alpha K(t) + \beta fm(t)] = v(t). \end{aligned}$$

これら(3-3),(3-4)より、物理単位で測つた住
宅用地の水準に関する式(3-5)が得られる。

$$(3-5) K(t) = \frac{Bv(t) - \sigma fp\beta m(t)}{p\alpha}.$$

(3) 動学体系の構築

政府部門が社会資本の建設に用いる多様財
につき、 $v(t)$ の定義を参照しつつ、(2-31)に(2-
29),(2-34'),(2-35'), $p(j, t) = p(t) = 1$ を適用し、

$$(3-6) \dot{\hat{q}}_G(t) = \frac{\theta[wv(t) + (r(t) + p)a(t)]}{m(t)}.$$

また、(3-6)を(2-30)に適用し、以下の(3-7)が
得られる (以上、付録 2 参照)。

$$(3-7) \frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = \theta[wv(t) + (r(t) + p)a(t)].$$

次に、 $v(t) = N^*(t) / G(t)$ 及び(2-34')を考慮
しつつ、(2-27)の両辺を $A(t)$ で除すると、

$$(3-8) \quad \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \{(1-\theta)[r(t)+p]-p\} \\ + (1-\theta) \frac{wv(t)}{a(t)} - \frac{e(t)}{a(t)}.$$

また、 $v(t) = N^*(t)/G(t)$ を考慮し、(2-28)

の両辺を $E(t)$ で除すると、

$$(3-9) \quad \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} = \{n + (1-\theta)[r(t)+p] - (\rho+p)\} \\ - b(\rho+p) \frac{a(t)}{e(t)}.$$

ここで、(2-8b)を全人口で集計すると、

$$p_k(t)K^*(t) = (1-\mu)E(t) \\ \Leftrightarrow p_k(t)K(t) = (1-\mu)e(t)$$

が得られるが、これに(3-2b)及び(3-5)を適用すると、多様財の種類数(企業数)と社会資本の比率 $m(t)$ を、次のような $e(t), v(t)$ の式として表すことができる(付録3)。

$$(3-10) \quad m(t) = \frac{B[wv(t) - (1-\mu)e(t)]}{\sigma fp \beta w}.$$

上記(3-10)を(3-3)に適用し、配当率を含む市場利率を、3つの状態変数 $a(t), e(t), v(t)$ の式として、以下のように表すことができる(付録4)。

$$(3-11) \quad \hat{r}(a(t), e(t), v(t)) = r(t) + p \\ = \frac{1}{\theta} [(1-\theta)wv(t) - e(t)] \frac{1}{a(t)},$$

ここで、(3-7)に(3-11)を適用すると、

$$(3-7') \quad \frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = \theta [wv(t) + \hat{r}(a(t), e(t), v(t))] a(t) \\ = wv(t) - e(t).$$

また、(3-8)に(3-11)を適用し、以下を得る。

$$(3-8') \quad \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{1}{\theta} [(1-\theta)wv(t) - e(t)] \frac{1}{a(t)} - p \\ = \hat{r}(a(t), e(t), v(t)) - p.$$

さらに、(3-9)に(3-11)を適用し、以下を得る。
(3-9')

$$\frac{\dot{E}(t)}{E(t)} = \frac{1-\theta}{\theta} [(1-\theta)wv(t) - e(t)] \frac{1}{a(t)} \\ - b(\rho+p) \frac{a(t)}{e(t)} + n - (\rho+p) \\ = (1-\theta)\hat{r}(a(t), e(t), v(t)) \\ + \{[n - (\rho+p)]e(t) - b(\rho+p)a(t)\} \frac{1}{e(t)}.$$

以上より、3つの状態変数 $a(t), e(t), v(t)$ に関する微分方程式体系を構築する。

はじめに、(3-8')から(3-7')を辺々差し引き、
(3-12)

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \hat{r}(a(t), e(t), v(t)) - p - [wv(t) - e(t)].$$

次に(3-9')から(3-7')を差し引き、以下の(3-13)を得る。

$$(3-13) \quad \frac{\dot{e}(t)}{e(t)} = (1-\theta)\hat{r}(a(t), e(t), v(t)) \\ + \{[n - (\rho+p)]e(t) - b(\rho+p)a(t)\} \frac{1}{e(t)} \\ - [wv(t) - e(t)].$$

また、 $v(t)$ の定義を参照しつつ、(2-4)及び(3-7')より、以下を得る。

$$(3-14) \quad \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = -(1-\eta)[wv(t) - e(t)] + n.$$

以上(3-12)~(3-14)の両辺に、それぞれ $a(t), e(t), v(t)$ を乗じ、(3-11)も考慮しつつ、

$$\begin{aligned} \dot{a}(t) &= \hat{r}(a(t), e(t), v(t))a(t) \\ &\quad - pa(t) - [wv(t) - e(t)]a(t) \\ (3-12') &= \frac{1}{\theta} [(1-\theta)wv(t) - e(t)] \\ &\quad - pa(t) - [wv(t) - e(t)]a(t) \\ &\equiv F_1(a(t), e(t), v(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (1-\theta)\hat{r}(a(t), e(t), v(t))e(t) \\ &\quad + \{[n - (\rho + p)]e(t) - b(\rho + p)a(t)\} \\ &\quad - [wv(t) - e(t)]e(t) \\ (3-13') &= \frac{1-\theta}{\theta} [(1-\theta)wv(t) - e(t)] \frac{e(t)}{a(t)} \\ &\quad + \{[n - (\rho + p)]e(t) - b(\rho + p)a(t)\} \\ &\quad - [wv(t) - e(t)]e(t) \\ &\equiv F_2(a(t), e(t), v(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \{(\eta - 1)[wv(t) - e(t)] + n\}v(t) \\ (3-14') &\equiv F_3(a(t), e(t), v(t)) \end{aligned}$$

が得られるが、これら(3-12')~(3-14')が、本論における完全な動学体系を構成する。

(4) 定常的成長均衡解の整理

定常的成長均衡における $a(t), e(t), v(t)$ の各値をそれぞれ a, e, v とおくと、 a, e, v は、(3-12')~(3-14')において、 $\dot{a}(t) = \dot{e}(t) = \dot{v}(t) = 0$ とおくことにより、求めることができる。

ところで、定常的成長均衡における配当を含む市場利子率は、(3-11)により、

$$(3-15) \hat{r}(a, e, v) = \frac{1}{\theta} [(1-\theta)wv - e] \frac{1}{a}.$$

次に(3-14')において、 $\dot{v}(t) = 0$ とおくことにより、 $\hat{n} \equiv n / (1-\eta) > n$ のもと、以下を得る。

$$(3-16) wv - e = \hat{n}.$$

また、(3-12')において、 $\dot{a}(t) = 0$ とおくことにより、(3-16)を考慮しつつ、以下が得られる。

(3-17)

$$(1-\theta)wv - e = \theta[p + (wv - e)]a = \theta(p + \hat{n})a.$$

さらに、(3-13')において $\dot{e}(t) = 0$ とおくと、(3-16)及び(3-17)を考慮し、以下を得る(付録5)。

$$(3-18) [(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})]e = b(\rho + p)a.$$

以上(3-16)~(3-18)より a, e, v が求められるが、 $a > 0, e > 0, v > 0$ かつ $\hat{r}(a, e, v) > 0$ であるため、税率 θ が満たすべき必要十分条件の1つは、(3-15),(3-16),(3-17)より、

$$(3-19) (1-\theta)wv - e > 0 \Leftrightarrow \theta < \frac{wv - e}{wv} = \frac{\hat{n}}{wv}.$$

また、 $a > 0, e > 0, v > 0$ であるため、 θ が満たすべき必要十分条件の2つ目は、(3-18)より、

$$(3-20) (n - \rho) - \theta(p + \hat{n}) > 0 \Leftrightarrow \theta < \frac{n - \rho}{p + \hat{n}}.$$

ただし、(3-20)において、 $n > \rho \Leftrightarrow b > p + \rho$ が常に成立していることを仮定する。

2. 解析による定常的成長均衡の動学的安定性の検証

(1) 動学に関わる連立微分方程式体系

微分方程式体系(3-12')~(3-14')を、(3-15)~(3-18)を考慮し、定常的成長均衡 (a, e, v) の近傍において線形近似することにより、以下のように行列を用いて表すことができる。

$$(3-21) \begin{bmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{e}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(t) - a \\ e(t) - e \\ v(t) - v \end{bmatrix}.$$

ただし、(3-21)右辺の行列の第1行目の要素、 F_{11}, F_{12}, F_{13} はそれぞれ $a(t), e(t), v(t)$ により、(3-12')を偏微分し、 (a, e, v) で評価した。

$$(3-22) \quad \begin{aligned} F_{11} &= -(\hat{n} + p) < 0, F_{12} = a - \frac{1}{\theta}, \\ F_{13} &= w \left(\frac{1-\theta}{\theta} - a \right). \end{aligned}$$

また、(3-21)右辺の行列の第2行目の要素、

F_{21}, F_{22}, F_{23} はそれぞれ $a(t), e(t), v(t)$ により、

(3-13') を偏微分し、 (a, e, v) で評価した。

(3-23)

$$F_{21} = -(1-\theta)(p + \hat{n}) \frac{e}{a} - b(\rho + p) < 0,$$

$$F_{22} = [(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})] - \frac{1-\theta}{\theta} \frac{e}{a} + e,$$

$$F_{23} = \frac{we}{\theta} \left[(1-\theta)^2 \frac{1}{a} - \theta \right].$$

さらに、(3-21)右辺の行列の第3行目の要素、

F_{31}, F_{32}, F_{33} はそれぞれ $a(t), e(t), v(t)$ により、

(3-14') を偏微分し、 (a, e, v) で評価した。

$$(3-24) \quad \begin{aligned} F_{31} &= 0, F_{32} = (1-\eta)v > 0, \\ F_{33} &= -(1-\eta)wv < 0. \end{aligned}$$

(2) 定常的成長均衡の動学的安定性

ここに(3-21)右辺の行列を F とおく。つまり、

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}.$$

このとき、行列 F の固有値 λ を求める固有方程式は、以下のように表される。

$$(3-25) \quad \begin{aligned} \lambda^3 - \text{tr}F \lambda^2 \\ + \varphi(a, e, v) \lambda - \det F = 0. \end{aligned}$$

ただし、 $\text{tr}F$ は行列 F の対角要素の和であり、 $\det F$ は行列 F の行列式である。また、

$$\begin{aligned} \varphi(a, e, v) &= F_{11}F_{22} + F_{22}F_{33} + F_{33}F_{11} \\ &\quad - F_{12}F_{21} - F_{23}F_{32} - F_{13}F_{31}. \end{aligned}$$

補題 3-1 (3-25)につき、以下が成立する。

(3-26)

$$\begin{aligned} \text{tr}F &= \eta wv \\ &\quad - \left\{ \frac{1-\theta}{\theta} \frac{e}{a} + (2\hat{n} + p) - [(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})] \right\}, \end{aligned}$$

(3-27)

$$\begin{aligned} \det F &= (1-\eta)wv \{ (\hat{n} + p)[(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})] + b(\rho + p) \} \\ &= (1-\eta)b(\rho + p)wv \left\{ (\hat{n} + p) \frac{a}{e} + 1 \right\} > 0. \end{aligned}$$

(証明)

$$\text{tr}F = F_{11} + F_{22} + F_{33}$$

に、(3-16),(3-22)~(3-24)を適用すると、

$$\begin{aligned} \text{tr}F &= -(\hat{n} + p) + [(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})] \\ &\quad - \frac{1-\theta}{\theta} \frac{e}{a} + e - (1-\eta)wv \\ &= \eta wv - \left\{ \frac{1-\theta}{\theta} \frac{e}{a} + (2\hat{n} + p) - [(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})] \right\} \end{aligned}$$

が得られ、補題の前半がしたがう。

補題の後半については、付録6を参照せよ。

(証明了)

補題 3-2 固有方程式(3-25)より求められる0

でない異なる固有根を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とおくと、そ

の符号の組み合わせにつき、1根が正、他の2根が負の実数（あるいは実部が負の互いに共役な複素数）であるための必要十分条件は、

(3-26')

$$\text{tr}F < 0 \Leftrightarrow \eta wv < \frac{1-\theta}{\theta} \frac{e}{a} + (2\hat{n} + p) - [(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})]$$

が成立することである。

(証明) 補題 3-1 の(3-27)により、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の

すべてが正の実数（あるいは1根が正の実数、他の2根につき、実部が負の互いに共役な複素数）または1根が正、他の2根が負の実数

(あるいは実部が負の互いに共役な複素数)の 2 通りのケースが考えられる。

しかるに、(3-26)が成立する場合、前者の可能性が排除されることから、補題がしたがう。

(証明了)

ここで、(3-25)の 3 根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が 3 つの異なる実数根であると仮定し、それぞれに対応する固有ベクトルを $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とおくと、任意定

数 C_1, C_2, C_3 を用い、(3-21)の一般解は、

(3-28)

$$\begin{bmatrix} a(t) - a \\ e(t) - e \\ v(t) - v \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \omega_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \omega_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} \omega_3$$

3 つの変数 $a(t), e(t), v(t)$ のうち、先決変数は $v(t)$ のみである。つまり、 $a(t), e(t), v(t)$ の初期値を $a(0), e(0), v(0)$ とおくと、歴史的に値が定まっているのは、 $v(0)$ のみである。

ゆえに、定常的成長均衡解の動学的安定性の観点から、そこに至る解経路が一意に定まるよう、 $v(0)$ の値を所与とし、 $a(0), e(0)$ の値を適切に選択することとなる。

Buiter[1984]によれば、定常解に至る解経路の一意であるには、先決変数の数が安定根の数に一致しなければならないが、本論において、その条件は満たされない。その点を踏まえ、以下の定理 3-3 に、本論における定常的成長均衡解の動学的安定性に関する仮説をまとめる。**定理 3-3** 定常的成長均衡解 (a, e, v) で線形近似された微分方程式体系(3-21)は、

(3-26')

$$trF < 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta w v < \frac{1 - \theta}{\theta} \frac{e}{a} + (2\hat{n} + p) - [(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})]$$

が成立する場合、 (a, e, v) に収束する解経路が

無数に存在し、動学的不決定性が生じる。

(証明) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ が異なる実数根である場

合に限定し、かつ、 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ を仮定し、

証明する。このとき、(3-26')が成立する場合、

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$ となり、(3-28)より、

定常的成長均衡に向かう安定的な経路上、

(3-28')

$$\begin{bmatrix} a(t) - a \\ e(t) - e \\ v(t) - v \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} \omega_{11} \\ \omega_{12} \\ \omega_{13} \end{bmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} \omega_{21} \\ \omega_{22} \\ \omega_{23} \end{bmatrix}$$

が成立するが、(3-28')に $t = 0$ を適用し、

$$(3-29a) a(0) - a = C_1 \omega_{11} + C_2 \omega_{21},$$

$$(3-29b) e(0) - e = C_1 \omega_{12} + C_2 \omega_{22},$$

$$(3-29c) v(0) - v = C_1 \omega_{13} + C_2 \omega_{23}.$$

このうち(3-29c)に着目すると、所与の $v(0)$ 及び、それぞれの固有ベクトルの第 3 要素 ω_{13}, ω_{23} に対し、(3-29c)を満たす C_1, C_2 の組み

合わせは無数に存在するが、これら C_1, C_2 を、

(3-29a)及び(3-29b)に、それぞれ適用することにより、非先決変数 $a(0), e(0)$ の値の組み合わせが無数に定まることとなる。

以上により、定理がしたがう。(証明了)

しかるに、(3-26)で与えられる trF の符号を解析的に検証するのは困難であることから、関連する外生変数を、以下の(3-30)として提示した各値に特定し、実施する数値計算により、定理 3-3 が成り立つことを示さざるを得ない。

(3-30)

$$b = 0.021, p = 0.011, n = 0.01, \eta = 0.20,$$

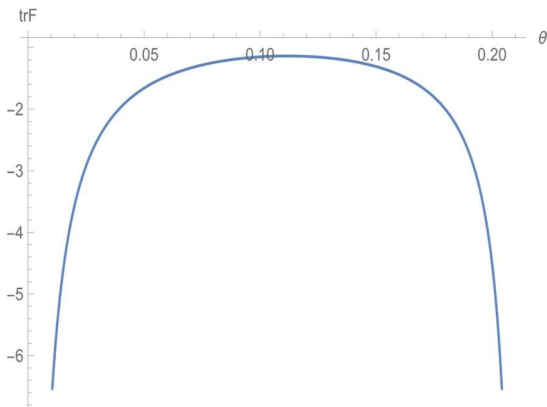
$$\sigma = 1.10, \rho = 0.005.$$

上記(3-30)のうち、 $p = 0.011$ としたのは、「令和2年人口動態統計」(厚生労働省)によれば、2020年の年間死亡者数(約137万人)が、同年10月1日時点における推計人口(約1億2325万人)の1.1%程度であることによる。

上記のもと、定常的成長均衡における $a(t), e(t), v(t)$ の各値 a, e, v を(3-16)~(3-18)より解くと、いずれも所得税率 θ の式として表すことができるが、これらを(3-30)として提示した外生変数の各値とともに(3-26)に適用すると、 trF 、 θ の式として表すことができる。

他方、(3-30)のもと、(3-20)における所得税率 θ が満たすべき条件は、 $\theta < 0.2128$ であるから、これを考慮し、 $0.001 \leq \theta < 0.21$ の範囲で trF を図示すると、以下のように表すことができる。

図III-1



(出所) Mathematica Ver12.2 により作成した。

上記の図III-1は、外生変数が(3-30)で提示する各値に設定され、かつ、所得税率 θ を、(3-20)の条件を満たす範囲で変化させる場合、常に $trF < 0$ であり、定理3-3が成り立つことを意味する。

つまり、定常的成長均衡解 (a, e, v) の近傍において、当該解に収束する経路が無数に存在し、奈良[2021]と同様、動学的な意味での不決定性が生じることがわかる。

IV 比較静学と社会的厚生 の考察

1. 所得税増税の比較静学

(1) 主要変数及び経済成長率に及ぼす影響
税率 θ に関する比較静学分析に用いる方程式は(3-16)~(3-18)であるが、これらを θ で全微分すると、以下の(4-1)~(4-3)が成立する。

$$(4-1) -\frac{de}{d\theta} + w\frac{dv}{d\theta} = 0,$$

$$(4-2) \theta(p + \hat{n})\frac{da}{d\theta} + \frac{de}{d\theta} - (1 - \theta)w\frac{dv}{d\theta} = -\frac{\hat{n}}{\theta},$$

$$(4-3)$$

$$b(\rho + p)\frac{da}{d\theta} - [(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})]\frac{de}{d\theta} = 0.$$

ただし、(4-2)を導出するに際し、(3-16),(3-17)より、次の(4-4)が得られることを考慮した。

$$(4-4) \theta[(p + \hat{n})a + wv] = wv - e = \hat{n}.$$

これら(4-1)~(4-3)を行列形式でまとめると、

$$(4-5)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & w \\ \theta(p + \hat{n}) & 1 & -(1 - \theta)w \\ b(\rho + p) & -[(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})] & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} da/d\theta \\ de/d\theta \\ dv/d\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{n}/\theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

上記(4-5)の左辺の3行3列の行列につき、

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & w \\ \theta(p + \hat{n}) & 1 & -(1 - \theta)w \\ b(\rho + p) & -[(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})] & 0 \end{bmatrix}$$

とおく。このとき(3-27)も考慮し、以下を得る。

$$(4-6)$$

$$\begin{aligned} \det \tilde{F} &= -\theta w \{ b(\rho + p) + (p + \hat{n})[(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})] \} \\ &= -\frac{\theta}{(1 - \eta)v} \det F < 0. \end{aligned}$$

以上より、増税が a, e, v のそれぞれに及ぼす影響につき、以下の定理4-1としてまとめることができる。

定理 4-1 増税 (所得税率 θ の上昇) により、定常的成長均衡における社会資本ストック 1 単位当たりの総資産 a 、総消費支出 e 、効率単位で測った労働力 v は、いずれも減少する。

上記の定理 4-1 を(3-1)に適用し、定常的成長均衡における効率単位で測った地価 q_L も、増税により、下落することは自明である。

この項の最後に、増税が定常的成長均衡における経済成長率に及ぼす影響に言及する。

この点につき、(3-7),(3-16)により、税率 θ の値に関わらず、経済成長率が、常に一定値 \hat{n} をとることが明らかであり、増税の影響を受けないことがわかる。

(2) 土地有効利用度に及ぼす影響

この件につき、多様財の種類数と社会資本ストックの比率 $m(t)$ に、各企業が固定的に投入する効率単位で測った土地の水準 f を乗じ、得られる $fm(t) = fM(t) / G(t)$ は、社会全体における物理単位で測った多様財企業用地の水準であると解釈できる。

このとき、 t 期における物理単位で測った有効利用されている土地の水準 (多様財企業用地と住宅地を合計した水準) を $\Gamma(t)$ とおくと、(2-46)及び(3-5)より、

$$\Gamma(t) = K(t) + fm(t)$$

$$(4-7) \quad \underline{= \frac{Bv(t) - fp(\sigma\beta - \alpha)m(t)}{p\alpha}}$$

と表すことができるが、さらに、(4-7)に(3-10)を適用すると、以下を得る (付録 7 参照)。

(4-7')

$$\Gamma(t) = \frac{B}{\sigma p \alpha \beta w} \left\{ (1 - \mu)(\sigma\beta - \alpha)e(t) + \frac{\alpha w v(t)}{\sigma\beta} \right\}$$

以上より、以下の定理 4-2 が導出される。

定理 4-2 増税 (所得税率 θ の上昇) により、定常的成長均衡における有効利用されている土地の水準 Γ が下落する。

(証明) はじめに、定常的成長均衡における有効利用されている土地の水準は、(4-7')より、(4-7')

$$\Gamma = \frac{B}{\sigma p \alpha \beta w} \left\{ (1 - \mu)(\sigma\beta - \alpha)e + \frac{\alpha w v}{\sigma\beta} \right\}$$

しかるに、定理 4-1 から、増税により、

$$\frac{de}{d\theta} < 0, \quad \frac{dv}{d\theta} < 0,$$

であることがわかっており、しかも、仮定により、 $\sigma\beta > \alpha$ であることから、

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} < 0$$

が得られ、増税により、土地の有効利用度が低下することがわかる。

(証明了)

2. 所得税増税と社会的厚生

ここでは、本論において増税が長期的効用にいかなる影響を及ぼすか、いわゆる社会的厚生に関する分析を実施することは不可能である理由を述べ、今後の課題を探る。

はじめに、Futagami, Morita and Shibata [1993] の方式にしたがい、長期的効用関数(2-12)を、社会的厚生分析になじむ形式に変形する。

オイラー方程式(2-14)の両辺を積分し、対数をとると、

(4-8)

$$e(s, t) = e(s, 0) \cdot \exp \left\{ \int_0^t [(1 - \theta)r(v) - (\rho + \theta p)] dv \right\}$$

上記を(2-14)に適用すると、

(4-9)

$$U(e(s, t)) = \frac{\log e(s, 0)}{\rho + p} + \int_t^\infty \left\{ \int_0^v [(1 - \theta)r(\mu) - (\rho + \theta p)] d\mu \right\} e^{-(\rho+p)(v-t)} dv$$

上記(4-12)の右辺2項目における市場利子率 $r(t)$ の決定要因 $a(t), e(t), v(t)$ が、それぞれの定常値 a, e, v に至る経路が無数に存在する点については、定理 3-3 及び直後の数値計算で示したとおりであるが、そのような経路の 1 つを $a_s(t), e_s(t), v_s(t)$ とおく。

上記に着目し、(3-11)を定常値 $r(t) = \hat{n}$ 、 $[a(t), e(t), v(t)] = (a, e, v)$ の近傍で線形近似すると、

(4-10)

$$\begin{aligned} r(a_s(t), e_s(t), v_s(t)) &= \hat{n} \\ &- \frac{1}{\theta a} \left\{ \theta(\hat{n} + p)[a_s(t) - a] + [e_s(t) - e] \right. \\ &\quad \left. + (1 - \theta)w[v_s(t) - v] \right\} \end{aligned}$$

上記(4-10)を(4-9)に適用し、 θ で全微分すると、

(4-11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(e(s, t))}{\partial \theta} &= \frac{\partial e(s, 0) / \partial \theta}{(\rho + p)e(s, 0)} \\ &+ \int_t^{\infty} \int_0^v \left\{ (1 - \theta) \frac{\partial r(a_s(\mu), e_s(\mu), v_s(\mu))}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - (\hat{n} + p) \right\} d\mu \left] e^{-(\rho + p)(v - t)} dv. \end{aligned}$$

ただし右辺の $\partial r(a_s(\mu), e_s(\mu), v_s(\mu)) / \partial \theta$ は、

$r(a_s(t), e_s(t), v_s(t))$ を定常値 a, e, v の近傍で

税率 θ により全微分し、得られる。すなわち、

(4-12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial r(a_s(t), e_s(t), v_s(t))}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\theta a} \left\{ \theta(\hat{n} + p) \left[\frac{da_s(t)}{d\theta} - \frac{da}{d\theta} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{de_s(t)}{d\theta} - \frac{de}{d\theta} \right] + (1 - \theta)w \left[\frac{dv_s(t)}{d\theta} - \frac{dv}{d\theta} \right] \right\}. \end{aligned}$$

しかるに、(4-11)の右辺第 1 項における、 $e(s, 0)$ は $e(s, t)$ が定常的成長均衡に至る解経路の初期値であるが、定理 3-3 及び直後の数値計算で示したように、本論では、このような解経路及び $e(s, 0)$ がとる値が無数に存在する

ことから、 $\partial e(s, 0) / \partial \theta$ の符号を検証するに際し、どの初期値に焦点を合わせるか、対象を絞り込むことができない。

同様の理由により、(4-11)右辺第 2 項目における $da_s(t) / d\theta, de_s(t) / d\theta, dv_s(t) / d\theta$ の符号も定かではない。

以上より、税率 θ の変更が、社会的厚生に及ぼす影響につき、Futagami, Morita and Shibata [1993] のような、厳密な分析を実施し得ない。

V 結論

本論では、奈良[2021]で構築した枠組み、つまり、生産要素や資産としての土地の存在を明示的に考慮した Blanchard[1985]型の閉鎖的動学一般均衡モデルに、Dixit-Stiglitz[1977]の独占的競争に基づく多様性選好の視点を融合させ、構築したモデルに、社会資本ストックの蓄積が土地利用を効率化するのみならず、労働生産性を高めるという発想を組み入れ、人口成長率を上回る経済成長が可能な枠組みに拡張し、そのもとで、各種分析を行った。

本論においては人口成長を上回る経済成長が可能であることから、定常状態のあり方が奈良[2021]のそれとは異なる。具体的に、総資産、総消費、効率単位で測った土地及び労働力、また、物理単位で測った地価が社会資本ストックと同一の率で成長し、その結果、総資産、総消費、効率単位で測った労働力の対社会資本ストック比率、また、多様財の種類数(多様財を生産する企業数)の対社会資本ストック比率、経済成長率、さらに、効率単位で測った

地価及び土地利用の形態（土地の有効利用度）が時間を通じて一定となる。

かかる状況のもと、社会資本建設の財源としての所得税増税により、総資産－社会資本ストック比率、総消費－社会資本ストック比率、効率単位で測った労働力－社会資本ストック比率、地価、経済成長率、さらには土地の有効利用度がいかなる影響を受けるかの比較静学分析を行った。

分析の結果、増税により、定常的成長均衡における総資産、総消費、効率単位で測った労働力とともに、効率単位で測った地価が下落し、土地の有効利用度も低下することがわかった。

上記の結論、つまり、増税が資源配分に対し、全体としてマイナスの影響を及ぼす理由は、所得税を財源とし、建設される社会資本ストックが人口成長を上回る経済成長を達成する原動力となる一方、税率の大きさに関わらず、経済成長率が一定であることに起因する。

ところで、比較静学分析に先立ち、定常的成長均衡に至る解経路が一意に決定されるか、動学的安定性の分析を行ったが、奈良[2021]と同様、定常的成長均衡に至る解経路、つまり、2つの非先決変数（総資産－社会資本ストック比率、総消費－社会資本ストック比率）の初期値の組み合わせが無数に存在することが判明した。

この点に関し、Mino[2017]において、様々な事例が取り上げられ、紹介されているような、動学的な意味での不決定性の問題が、本論においても生じることが結論付けられた。

本論においては、社会資本ストックの蓄積が土地の生産性のみならず、労働生産性を高めるがゆえに、人口成長を上回る経済成長が達成される点については、既に述べたとおりであるが、他方、経済成長率が、所得税率の値によらず人口成長率に連動する一定の値を取る点において奈良[2021]と共通し、この点が、定常的成長均衡の動学的な不決定性を生み出す要因ではないかと推察される。

この点、社会資本ストックの蓄積が生産要素としての土地と労働のいずれもの生産性を高めるといふ発想を堅持しつつ、本論の枠組みを拡張し、経済成長率それ自身が内生的に決定されるようなメカニズムを導入することにより、定常的成長均衡の動学的安定性につき、本論とは異なる結論が生み出される可能性もある。

そして、そのもとで、定常的成長均衡に至る一意的な解経路を見出すことができれば、IVの後半で展開した理由により、本論においては実施できなかった社会的厚生分析も可能になり得る。

本論を上記のように経済成長率が内生的に決定される枠組みに拡張し、定常的成長均衡解の動学的安定性、また、土地の有効利用度、社会的厚生分析を行うことを、2地域モデルに拡張し、分析を行うこととともに、今後の課題に設定し、結びとする。

付 録

付録 1. (2-31)の導出過程

$$Q_G(t) = \left[\int_0^{M(t)} \hat{q}_G(j,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \sigma > 1$$

とおき、以下のラグランジュ関数を構築する。

$$\begin{aligned} L[\hat{q}_G(j,t), \lambda_G(t)] &= \left[\int_0^{M(t)} \hat{q}_G(j,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} M(t)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &+ \lambda_G(t) \left\{ T(t) - \int_0^{M(t)} p(j,t) \hat{q}_G(j,t) dj \right\}. \end{aligned}$$

公共財の生産量を最大化する条件により、

$$\begin{aligned} \lambda_G(t) p(j,t) &= \hat{q}_G(j,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \\ \text{(a-1)} \left[\int_0^{M(t)} \hat{q}_G(j,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} &M(t)^{\frac{1}{\sigma-1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lambda_G(t)p(j,t) \\ &= \hat{q}_G(j,t)^{\frac{1}{\sigma}} \left[\int_0^{M(t)} \hat{q}_G(j,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} M(t)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &\Leftrightarrow \lambda_G(t)p(j,t) = \hat{q}_G(j,t)^{\frac{1}{\sigma}} Q_G(t)^{\frac{1}{\sigma}} M(t)^{\frac{1}{\sigma-1}} \end{aligned}$$

上記に $\hat{q}_G(j,t)$ を乗じ、

$$\begin{aligned} &\lambda_G(t)p(j,t)\hat{q}_G(j,t) \\ &= \hat{q}_G(j,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} Q_G(t)^{\frac{1}{\sigma}} M(t)^{\frac{1}{\sigma-1}} \end{aligned}$$

が得られるが、

$$P_G(t)Q_G(t) \equiv \int_0^{M(t)} p(j,t)\hat{q}_G(j,t) dj = T(t)$$

とおき、両辺を区間 $[0, M(t)]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} &\lambda_G(t)P_G(t)Q_G(t) = Q_G(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} Q_G(t)^{\frac{1}{\sigma}} M(t)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &\Leftrightarrow \lambda_G(t) = P_G(t)^{-1} M(t)^{\frac{1}{\sigma-1}}. \end{aligned}$$

上記を(a-1)にもどし、

$$\begin{aligned} &P_G(t)^{-1} M(t)^{\frac{1}{\sigma-1}} p(j,t) \\ &= \hat{q}_G(j,t)^{\frac{1}{\sigma}} Q_G(t)^{\frac{1}{\sigma}} M(t)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &\Leftrightarrow \hat{q}_G(j,t)^{\frac{1}{\sigma}} = p(j,t)^{-1} P_G(t) Q_G(t)^{\frac{1}{\sigma}} \\ &\Leftrightarrow \hat{q}_G(j,t) = p(j,t)^{-\sigma} P_G(t)^{\sigma} Q_G(t) \\ &= p(j,t)^{-\sigma} P_G(t)^{\sigma-1} P_G(t) Q_G(t) \end{aligned}$$

つまり、

$$(a-2) \hat{q}_G(j,t) = p(j,t)^{-\sigma} P_G(t)^{\sigma-1} T(t)$$

しかるに、(a-2)の両辺に $p(j,t)$ を乗じ、区間 $[0, M(t)]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} &p(j,t)\hat{q}_G(j,t) = p(j,t)^{1-\sigma} P_G(t)^{\sigma-1} T(t) \\ &\Leftrightarrow P_G(t)Q_G(t) \\ &= P_G(t)^{\sigma-1} P_G(t)Q_G(t) \left[\int_0^{M(t)} p(j,t)^{1-\sigma} dj \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow P_G(t)^{1-\sigma} = \left[\int_0^{M(t)} p(j,t)^{1-\sigma} dj \right] \\ &\Leftrightarrow P_G(t) = \left[\int_0^{M(t)} p(j,t)^{1-\sigma} dj \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \end{aligned}$$

が計算されるが、

$$(2-10) P(t) = \left[\int_0^{M(t)} p(j,t)^{1-\sigma} dj \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

より、これは、

$$(a-3) P_G(t) = P(t)$$

であることを意味する。

この(a-3)を(a-2)に適用すると、(2-31)が導出される。

付録2. (3-6),(3-7)の導出過程

はじめに、 $p(j,t) = 1$ 及び(2-35')を(2-31)に

適用すると、

$$(a-4)$$

$$\hat{q}_G(j,t) = T(t) / M(t) = T(t) / m(t)G(t)$$

が得られるが、この(a-4)に(2-29)を適用すると、ただちに(3-6)が得られる。

次に、(a-4)を(2-30)に適用して計算すると、

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= \left[\int_0^{M(t)} \hat{q}_G(j,t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} M(t)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &= \left[M(t) \left(\frac{T(t)}{M(t)} \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} M(t)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &= M(t)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \left(\frac{T(t)}{M(t)} \right) M(t)^{\frac{1}{\sigma-1}} \\ &= M(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma-1}} \left(\frac{T(t)}{M(t)} \right) = T(t). \end{aligned}$$

仮定により、 $N^*(t)/G(t) = v(t)$ であること及び(2-34')を考慮すると、

$$\begin{aligned} \dot{G}(t) &= T(t) = \theta[w(t)N^*(t) + (r(t) + p)A(t)] \\ &= \theta G(t)[w(t)v(t) + (r(t) + p)a(t)] \end{aligned}$$

上記の両辺を $G(t)$ で除し、(3-7)が得られる。

付録 3. (3-10)の導出過程

(3-2b),(3-5)を $p_k(t)K(t) = (1 - \mu)e(t)$ に適用し、以下のように計算される。

$$\begin{aligned} p_k(t)K(t) &= \frac{(\sigma - 1)p\alpha}{\sigma B} K(t) \\ &= \frac{(\sigma - 1)p\alpha}{\sigma B} \frac{Bv(t) - \sigma fp\beta m(t)}{p\alpha} = (1 - \mu)e(t) \\ \Leftrightarrow \frac{w}{B} [Bv(t) - \sigma fp\beta m(t)] &= (1 - \mu)e(t) \\ \Leftrightarrow \frac{w}{B} \sigma fp\beta m(t) &= wv(t) - (1 - \mu)e(t) \\ \Leftrightarrow m(t) &= \frac{B[wv(t) - (1 - \mu)e(t)]}{\sigma fp\beta w} \end{aligned}$$

付録 4. (3-11)の導出過程

はじめに、(3-3)より、

$$\begin{aligned} \theta(r(t) + p)a(t) &= \frac{f(\sigma - 1)p\beta}{B} m(t) \\ &\quad - \theta wv(t) - \mu e(t) \\ \Leftrightarrow r(t) + p &= \frac{1}{\theta} \left\{ \frac{(\sigma - 1)fp\beta}{B} m(t) - \theta wv(t) - \mu e(t) \right\} \frac{1}{a(t)} \\ \text{上記に(3-10)を適用すると、} & \\ r(t) + p &= \frac{1}{\theta a(t)} \left\{ \frac{(\sigma - 1)fp\beta}{B} \left[\frac{B[wv(t) - (1 - \mu)e(t)]}{\sigma fp\beta w} \right] - \theta wv(t) - \mu e(t) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\theta a(t)} \{ wv(t) - (1 - \mu)e(t) - \theta wv(t) - \mu e(t) \} \\ &= \frac{1}{\theta} [(1 - \theta)wv(t) - e(t)] \frac{1}{a(t)}. \end{aligned}$$

付録 5. (3-18)の導出過程

(3-13')において、 $\dot{e}(t) = 0$ とおくことにより、

$$\begin{aligned} &\frac{1 - \theta}{\theta} [(1 - \theta)wv - e] \frac{e}{a} \\ &= (wv - e)e - [n - (\rho + p)]e + b(\rho + p)a. \end{aligned}$$

上記に(3-16),(3-17)を適用し、

$$\begin{aligned} &\frac{1 - \theta}{\theta} \cdot \theta(p + \hat{n})a \cdot \frac{e}{a} = \hat{n}e - [n - (\rho + p)]e + b(\rho + p)a \\ \Leftrightarrow (1 - \theta)(p + \hat{n})e &= \hat{n}e - [n - (\rho + p)]e + b(\rho + p)a \\ \Leftrightarrow [(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})]e &= b(\rho + p)a. \end{aligned}$$

付録 6. (3-27)の導出過程

$F_{31} = 0$ を考慮しつつ、余因子展開により、

$\det F$ を計算すると、

$$\begin{aligned} \det F &= F_{11}(F_{22}F_{33} - F_{23}F_{32}) \\ &\quad - F_{21}(F_{12}F_{33} - F_{13}F_{32}) \\ &= -(\hat{n} + p) \cdot \\ &\quad \{ -(1 - \eta)wv \cdot \\ &\quad \left([(n - \rho) - \theta(p + \hat{n})] - \frac{1 - \theta}{\theta} \frac{e}{a} + e \right) \\ &\quad - (1 - \eta)v \cdot \frac{we}{\theta} \left[(1 - \theta)^2 \frac{1}{a} - \theta \right] \} \\ &\quad + \left\{ (1 - \theta)(p + \hat{n}) \frac{e}{a} + b(\rho + p) \right\} \cdot \\ &\quad \left\{ -(1 - \eta)wv \left(a - \frac{1}{\theta} \right) \right. \\ &\quad \left. - (1 - \eta)v \cdot w \left(\frac{1 - \theta}{\theta} - a \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1-\eta)wv \times \\
 &\left\{ (\hat{n}+p) \left[[(n-\rho) - \theta(p+\hat{n})] - \frac{1-\theta}{\theta} \frac{e}{a} + e \right] \right. \\
 &+ (\hat{n}+p) \frac{e}{\theta} \left[(1-\theta)^2 \frac{1}{a} - \theta \right] \left. \right\} \\
 &- \left\{ (1-\theta)(p+\hat{n}) \frac{e}{a} + b(\rho+p) \right\} \cdot \\
 &\left\{ \left(a - \frac{1}{\theta} \right) + \left(\frac{1-\theta}{\theta} - a \right) \right\} \\
 &= (1-\eta)wv \times \\
 &(\hat{n}+p)[(n-\rho) - \theta(p+\hat{n})] - (\hat{n}+p) \frac{1-\theta}{\theta} \frac{e}{a} \\
 &+ (\hat{n}+p)e + (\hat{n}+p) \frac{e}{\theta} \cdot (1-\theta)^2 \frac{1}{a} - (\hat{n}+p)e \\
 &+ (1-\theta)(p+\hat{n}) \frac{e}{a} + b(\rho+p) \\
 &= (1-\eta)wv \cdot \\
 &(\hat{n}+p)[(n-\rho) - \theta(p+\hat{n})] + b(\rho+p) \\
 &+ \left\{ \frac{(1-\theta)^2}{\theta} - \frac{1-\theta}{\theta} + (1-\theta) \right\} (\hat{n}+p) \frac{e}{a} \\
 &= (1-\eta)wv \cdot \\
 &(\hat{n}+p)[(n-\rho) - \theta(p+\hat{n})] + b(\rho+p) \\
 &+ (1-\theta) \left(\frac{1-\theta}{\theta} - \frac{1}{\theta} + 1 \right) (\hat{n}+p) \frac{e}{a} \\
 &= (1-\eta)wv \cdot \\
 &\{ (\hat{n}+p)[(n-\rho) - \theta(p+\hat{n})] + b(\rho+p) \}.
 \end{aligned}$$

上記に(3-18)を適用し、

$\det F$

$$\begin{aligned}
 &= (1-\eta)wv \left\{ (\hat{n}+p)b(\rho+p) \frac{a}{e} + b(\rho+p) \right\} \\
 &= (1-\eta)b(\rho+p)wv \left\{ (\hat{n}+p) \frac{a}{e} + 1 \right\} > 0
 \end{aligned}$$

となり、補題の後半がしたがう。

付録7. (4-7),(4-7')の導出過程

(3-5),(3-10)より、

$$\begin{aligned}
 \Gamma(t) &= K(t) + fm(t) = \frac{Bv(t) - \sigma fp\beta m(t)}{p\alpha} + fm(t) \\
 &= \frac{1}{p\alpha} [Bv(t) - \sigma fp\beta m(t) + fp\alpha m(t)] \\
 &= \frac{Bv(t) - fp(\sigma\beta - \alpha)m(t)}{p\alpha}
 \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
 \Gamma(t) &= \frac{1}{p\alpha} [Bv(t) - \sigma fp\beta m(t) + fp\alpha m(t)] \\
 &= \frac{1}{p\alpha} \left\{ Bv(t) - \frac{B[wv(t) - (1-\mu)e(t)]}{w} \right. \\
 &+ \left. \frac{\alpha B[wv(t) - (1-\mu)e(t)]}{\sigma\beta w} \right\} \\
 &= \frac{B}{\sigma p\alpha\beta w} \left\{ (1-\mu)(\sigma\beta - \alpha)e(t) + \frac{\alpha wv(t)}{\sigma\beta} \right\}.
 \end{aligned}$$

参考文献

- [1]Barro,R.J.[1990]“Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth,” *Journal of Political Economy* 98,s103-s125.
- [2]Barro,R.J. and Sala-i-Martin[1992], “Public Finance in Models of Economic Growth,” *Review of Economic Studies* 59,645-661.
- [3]Blanchard, O. J. [1985] “Debt, Deficits, and Finite Horizons,” *Journal of Political Economy*, 93(2), 223–247.
- [4]Buitcr,W.H.[1984],“Saddlepoint Problems in Continuous Time Rational Expectations Models: A General Method and Some Expectatious Macroeconomic Examples,” *Econometrica* 52,665-680.
- [5]Dixit A.K.and Stiglitz J.E. [1977] “Monopolistic competition and optimum product diversity,” *American Economic Review* 67, 297-308.

- [6]Futagami,K. and Morita,Y. and Shibata,A.
[1993] “Dynamic Analysis of an Endogenous
Growth Model with Public Capital,”
Scandinavian Journal of Economics 95,607-625.
- [7]Grossman,G.M. and Helpman,E.[1991a],
Innovation and Growth in the Global Economy,
The MIT Press.
- [8]厚生労働省[2021]「令和 2 年人口動態統計月
報年計（概数）の概況」厚生労働省、
[https://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw/jinkou/
geppo/nengai20/index.html](https://www.mhlw.go.jp/toukei/saikin/hw/jinkou/geppo/nengai20/index.html) (2021/12/27) .
- [9]Mino.K.[2017],*Growth and Business Cycles
with Equilibrium Indeterminacy*,Springer.
- [10]奈良 卓[2019]「社会資本が土地利用と経
済成長に及ぼす影響」『八戸学院大学紀要』
58,1-23.
- [11]奈良 卓[2021]「社会資本が土地利用と社
会的厚生に及ぼす影響－多様性選好の導入
－」『八戸学院大学紀要』 62,7-25.
- [12] 野口悠紀雄[1985]「土地課税が都市的土地
利用に与える影響」『経済研究』 36,15-22.

執筆者紹介（所属）

奈良 卓 八戸学院大学 地域経営学部
地域経営学科 教授