集積の経済と都市の成長

―― Weil 型重複世代モデルを用いた分析 ――

奈　良　　卓

目　次

I.　序　　論

近年における少子・高齢化の一層の進行と，また地域間格差の拡大といった経済社会情勢の変化は，土地利用の状況にも影響を及ぼしている。具体的には，東京都区部の利便性の高い地域を中心に，土地に対する需要が高まり，地価回復・上昇に結びつく一方，地方都市においては，その大部分で，依然として高い率で下落を続けている（『平成 18 年地価公示』）。このような地方都市の土地利用状況の背景として，一部地域で人口減少が本格化するとともに，地域を支える産業の低迷等によって，土地需要が低下している点を挙げることができる。とりわけ，大規模商業施設の郊外立地や公共施設の郊外移転等によって，中心市街地に空き店舗が増加し，虫食い的な空き地を発生させるとともに，従来の人口集住地域においては，人口の高齢化と減少とによって，空き家・空地化が進行しており，いずれも低・未利用地の発生と増大に結びついている。以上の問題を踏まえ，我が国の土地利用に関する今後の課題は，適正な土地利用計画のもと，いかに低・未利用地を解消し，土地の有効利用を促進していくかである（『平成 18 年版土地白書』）。

さて，とりわけ都市部において，土地の有効利用を促進する方策の１つは，都市全体の生産性を高め，そのことを通じてその都市内にある土地が生産的な用途に利用転換されたならば得られる収益を高めることにより，利用転換のインセンティブを与えることである。そして，都市全体の生産性を向上させる要因の重要な１つが集積効果である。ここに，集積効果とは，都市への人口集中や企業の集中によってもたらされる，とりわけ生産活動における外部効果を意味する。かかる集積効果の問題を考える場合には，正の集積効果と負の集積効果とに分類して議論されなければならない。正の集積効果としては，人と企業とが極めて狭い範囲に集中することによる知識やアイディア・ノウハウのスピルオーバーによって，生産性が高まる効果を想定することができる。また，負の集積効果として，都市への人口密集が混雑を引き起こし，生産性を低下させる効果を想定することができる。

これらのうち，正の集積効果に類似した考え方を提起した先行研究として，Arrow[1962]及び Romer [1986] を挙げることができるが，彼

らが想定した知識やアイディア・ノウハウのスピルオーバーが引き起こす外部効果による生産性の向上は，同一産業内で生じるものであり，必ずしも狭い都市空間に限定されていなかった。これに対して Lucus［1988］は，その物的資本と人的資本とが明確に区別されたモデルの展開により，とりわけ人的資本の蓄積が引き起こす外部効果が経済成長に与える影響を分析したが，その中で外部効果が発生しやすい場としての都市の役割を重視している。

都市における集積効果が及ぼす影響すなわち集積効果が都市の生産性を高め，人口集住と都市の拡大をもたらすメカニズムを直接的に提示したのは，Rabenau［1979］，Fujita［1988］である。しかるに，これらの研究においては，集積効果が土地の有効利用度に及ぼす影響について言及されていない。また，Rabenau が都市に人口が集中することそれ自体が集積効果をもたらすとしているのに対して，Fujita は都市における中間生産物あるいは最終消費財のバラエティの増大が都市の生産性を高めるという発想に立脚しているが，いずれにおいても資本蓄積が生産性に及ぼす影響については分析されていない。都市の成長をあつかった他の研究として，Miyao［1977］，Kanemoto［1980］を挙げることができる。Miyao では，長期的な均衡において，都市の規模が外生的な人口成長率と同率で成長し，Kanemoto では，同規模の都市数がやはり人口成長率と同率で拡大することが結論づけられているが，いずれにおいても土地の希少性と，都市の規模あるいは都市数の拡大に伴う土地利用転換費用が考慮されていない。

生産要素及び資産としての土地の希少性を考慮した上で土地の有効利用度等土地利用のあり方を分析した先行研究として，土地利用技術進歩が外生的に与えられるとした野口[1985]，奈良［1997］及び同［2000］，また外部効果を伴う R ＆ D 活動の成果としての土地利用技術進歩率が内生的に決定されるとした奈良［2001a]，[2001b]，及び同[2003]を挙げることができる。しかるに，前者（野口［1985］等）の前提とした土地利用技術の進歩が人口成長率に等しい率で外生的に与えられるという仮定が恣意的であることは言うまでもないが，後者(奈良[2001a]等）についても，土地の用途に関わらず，技術進歩率が同一の値であるという恣意的な仮定に立脚していた。また，土地の利用目的の 1 つが居住用であるとすれば，そこに立地する建物としての住宅資本（housing capital）が，明示的にモデルの中で取り上げられていない。

本論文では，直前で掲げた野口［1985］等及び奈良［2001a］等の不十分な点を克服すべく，消費の対象及び資産としての両方の側面をもつ住宅資本を明示的にモデルの中に組み入れるとともに，都市における土地利用技術進歩を新たな視点からとらえる。すなわち，都市の面積が一定である場合，居住用の土地の効率的な利用とは建物の高層化すなわち住宅資本の蓄積そのものであり，産業用の土地の効率的な利用は intangible な知識やノウハウを併せもつ実物資本の蓄積がもたらす土地生産性の向上によって実現される。

本論文の目的は，以上の問題意識に基づき，かかる資本蓄積に起因する集積の経済または集積効果の存在を考慮した動学一般均衡モデルを構築し，その中で，集積効果がいかにして都市における生産性の向上と成長をもたらすか，また，かかる生産性の向上や成長が土地の有効利用度を高めることと両立するかを検討する。本論文における次章以下の構成は以下のとおりである。はじめに II で，基本的なフレームワークを示す。次の III では，定常的成長均衡の存在と一意性及びその動学的な性質を論じる。さらに IV では，成長率の上昇が土地の有効利用促進と両立するか，また社会的厚生を高めるかを分析する。最後の V では，今後の課題と結論を述べる。

II.　基本的モデル

本章では分析を行うための基本的なモデルに

ついて説明する。具体的には，各経済主体，すなわち企業及び家計の各時点における行動決定のあり方から，市場での取引を考慮した短期均衡式導出までのプロセスを詳細に説明することとする。

経済主体の行動を，Mino and Shibata［1995］及び Futagami and Shibata［2000］同様，Weil［1989］によって提示された連続型重複世代モデルの枠組みで論じる。

1.　人口に関する仮定

s 期生まれの世代の人口を

$$dN(s)=ne^{ns}$$

とおく。このとき，t 期における総人口 $N(t)$ は，初期値を $N(0)=1$ として，

$$N(t)=\int_{-\infty}^{t}dN(s)ds=n\int_{-\infty}^{t}e^{ns}ds=n\left[\frac{1}{n}e^{ns}\right]_{-\infty}^{t}$$
$$=e^{nt}$$

と計算される。すなわち，

$$N(t)=e^{nt}.$$

また，これより，

(2-1)　$$\dot{N}(t)/N(t)=n$$

が得られるから，この経済における人口増加率は一定率 n である。また，以後一貫して労働人口は総人口に等しいことを仮定する。

2.　企業の行動

完全競争の仮定のもと，生産活動を行う部門として，製造業部門及び土地利用転換サービス部門を想定する。尚，詳細は各箇所で説明することとする。

(1)　製造業部門

はじめに，製造業部門は実物資本，土地及び労働を用いて最終消費財としての製造業製品（manufactured good）及び資本の生産を行う。ただし，製造業部門が生産する資本は，実物資本及び住宅資本の 2 種類である。このうち，住宅資本は，住宅の（土地を除いた）建物部分に相当する。いま，第 t 期における代表的企業の生産物を $\hat{y}_m(t)$ とし，また，実物資本，製造業部門の生産活動に使用される土地（以下，産業用地と表示する）及び製造業部門に投入される労働力をそれぞれ $\hat{k}_m(t)$, $\hat{l}_m(t)$, $\hat{n}_m(t)$ として，次のような Cobb-Douglas 型の生産関数を想定する。

(2-2)
$$\hat{y}_m(t)=F(\hat{k}_m(t),\ \hat{l}_m(t),\ \hat{n}_m(t))$$
$$=A\hat{k}_m(t)^x\hat{l}_m(t)^z\hat{n}_m(t)^\omega K_m(t)^\lambda N(t)^\varepsilon,$$
$$0<x<1,\ 0<z<1,\ 0<\omega<1,\ x+z+\omega=1,$$
$$\lambda>0,\ \varepsilon<0.$$

上記(2-2)における $K_m(t)^\lambda$ は，経済全体に存在する資本ストックが生産活動にもたらす正の外部効果（集積の経済）であり，$N(t)^\varepsilon$ は，都市人口の増大が生産活動にもたらす負の外部効果（集積の不経済）であるものとする。ここに，各企業の規模は等しく，企業数は $\tau\geqq1$ であるものとする。また，$L_m(t)$, $N_m(t)$ を，それぞれ製造業部門の生産活動に使用される土地（産業用地）の総量及び労働力の総量であるものとすると，以下が成立する。

(2-3a)　$K_m(t)=\tau\hat{k}_m(t)$,
(2-3b)　$L_m(t)=\tau\hat{l}_m(t)$,
(2-3c)　$N_m(t)=\tau\hat{n}_m(t)$.

ここに企業数は人口に等しい，すなわち $\tau=N(t)$ を仮定するとともに，$\lambda=1-x$ 及び $\varepsilon=-\omega$ とおくと，生産関数 (2-2) は，以下 (2-2′) のように書き換えられる[1]。

(2-2′)
$$Y_m(t)=AK_m(t)^xL_m(t)^zN_m(t)^\omega K_m(t)^{1-x}N(t)^{-\omega}$$
$$=AL_m(t)^zn_m(t)^\omega K_m(t)$$

ただし，$Y_m(t)$ は，製造業部門の生産水準の（経済全体における）総量である。また，

(2-4)　$$n_m(t)=\frac{N_m(t)}{N(t)}$$

は，総労働力＝総人口 $N(t)$ に占める製造業部門の労働力の水準 $N_m(t)$ の割合である。

次に，製造業製品，実物資本及び住宅資本の価格を 1 とする（numeraire）。また，資本減耗は存在しないものとし，資本レンタル率，地代，製造業部門における名目労働賃金率を，それぞれ $r_m(t), \pi_m(t), w_m(t)$ とおくと，同部門の利潤最大化行動により，以下を得る。

(2-5)　$r_m(t)=xAL_m(t)^z n_m(t)^\omega,$

(2-6)　$\pi_m(t)=zAL_m(t)^{z-1} n_m(t)^\omega K_m(t),$

(2-7)　$w_m(t)$
$$=\omega AL_m(t)^z n_m(t)^{\omega-1} K_m(t) N(t)^{-1}.$$

(2)　土地利用転換サービス部門

土地の用途選択はその時点の土地所有者によって行われるため，生産的土地（産業用地及び住宅地）については毎期売却の際に更地へ利用転換することとなる。そこで，土地の利用転換に専業する部門，すなわち，土地利用転換サービス部門の存在を仮定する。土地利用転換は，一定量の労働力を投入して行われる。第 t 期において提供される土地利用転換サービスの総量を $Y_b(t)$，投入される労働力及びその労働力全体に占める割合を，それぞれ $N_b(t)$ 及び $n_b(t)$ として，以下に示すような簡単な生産関数を仮定する。

(2-8)　$Y_b(t)=B\left(\dfrac{N_b(t)}{N(t)}\right)=Bn_b(t),\ B>0.$

上記 (2-8) は，土地利用転換サービスの 1 単位の生産に必要な労働力は，$N(t)/B$ であることを意味する。すなわち，土地利用転換サービスにも，人口増加による負の外部効果が作用する。いま，物理単位で測った 1 単位の産業用地及び住宅地の利用転換に，それぞれ，1 単位，σ 単位のサービスを投入するものとすれば，$L_h(t)$ を住宅地の総量として，土地利用転換サービスの需給均衡式は，以下（2-9）で与えられる。

(2-9)　$L_m(t)+\sigma L_h(t)=Bn_b(t).$

いま，サービス 1 単位の価格を $p_b(t)$，土地利用転換部門における名目賃金を $w_b(t)$，同部門の第 t 期における利益は，労働力 $N_b(t)$ の関数として，以下のように表わされる。

$$\Pi_b(N_b(t))=p_b(t)B\left(\frac{N_b(t)}{N(t)}\right)-w_b(t)N_b(t).$$

よって，サービス生産量が正になるような完全競争均衡は，以下で与えられる。

(2-10)　$w_b(t)=\dfrac{Bp_b(t)}{N(t)}.$

3.　家計の行動

(1)　家計の効用関数と最適化問題

いま，s 期生まれの代表的家計の t 期における製造業製品の消費水準を $c_m(s,t)$ とおき，住宅サービスにおける建物部分の消費は，ストックたる住宅資本を直接消費（利用）して行われることを仮定し，その水準を $k_h(s,t)$ とおく。このとき，同世代が任意の t 時点に直面する効用関数 $U(c_m(s,t), k_h(s,t))$ は，世代間割引率 $\rho\geqq 0$ のもとで，

(2-11)
$$U(c_m(s,t),\ k_h(s,t))=$$
$$\int_t^\infty [\alpha \log c_m(s,v)+(1-\alpha)\log k_h(s,v)]e^{-\rho(v-t)}dv$$

と表わされる。ただし，$\rho<n$ を仮定する。

ところで，1 単位の住宅資本の立地に必要な効率単位で測った土地（宅地）の水準を η とおき，家計の住宅立地に必要な効率単位で測った土地の水準を $l_h^*(s,t)$ とおくと，

(2-12)　$l_h^*(s,t)=\eta k_h(s,t),\quad \eta>0$

と書くことができる。この（2-12）は，住宅資本の蓄積により，効率単位で測った土地が増大することを意味する。他方，物理単位で測った宅地の水準 $l_h(s,t)$ は，人口が増加するにしたがい，人口増加率と同じ割合で低下することになる。つまり，

(2-13)　$l_h(s,t)=\eta/N(t).$

次に，s 期生まれ代表的家計の t 期における労働所得及び非人的資産（nonhuman wealth）をそれぞれ $w(s,t)$ 及び $a(s,t)$ とおくととも

に，住宅資本のレンタル価格を $r_h(t)$，効率単位で測った宅地の地代を $\pi_h^*(t)$ とおくと，家計の直面する予算制約式は，(2-12) を考慮しつつ，以下 (2-14) で表わされる。

$$\text{(2-14)}\quad \frac{da(s,t)}{dt}=r(t)a(s,t)+w(s,t)-c_m(s,t)-[r_h(t)+\eta\pi_h^*(t)]k_h(s,t).$$

ゆえに，家計が直面する最適化問題は，改めて以下 (P) のように記すことができる。

$$\text{(P)}\quad \max_{c,k}\int_t^\infty[\alpha\log c_m(s,v)+(1-\alpha)\log k_h(s,v)]e^{-\rho(v-t)}dv,$$

$$s.t.\quad \frac{da(s,t)}{dt}=r(t)a(s,t)+w(s,t)-c_m(s,t)-[r_h(t)+\eta\pi_h^*(t)]k_h(s,t).$$

$q(t)$ を，(P) に対応する当該期価値ハミルトン関数の随伴変数として，最適化の必要条件は，以下 (2-15a)，(2-15b)，(2-16) 及び (2-17) で与えられる。

$$\text{(2-15a)}\quad \frac{\alpha}{c_m(s,t)}=q(t),$$

$$\text{(2-15b)}\quad \frac{1-\alpha}{k_h(s,t)}=q(t)[r_h(t)+\eta\pi_h^*(t)],$$

$$\text{(2-16)}\quad \dot{q}(t)=[\rho-r(t)]q(t),$$

$$\text{(2-17)}\quad \lim_{v\to\infty}a(s,v)\exp\left(-\int_t^v r(\mu)d\mu\right)=0.$$

上記のうち，(2-17) は N.P.G. 条件であるが，これは，以下で表わされる横断条件 (2-18) と同値である[2)]。

$$\text{(2-18)}\quad \lim_{v\to\infty}q(v)e^{-\rho v}a(s,v)=0.$$

また，(2-15a) 及び (2-16) より，以下のオイラー方程式 (2-19) を得る。

$$\text{(2-19)}\quad \frac{dc_m(s,t)}{dt}=[r(t)-\rho]c_m(s,t).$$

さらに，(2-15a) 及び (2-15b) より，以下 (2-15′) が得られる。

(2−15′)

$$[r_h(t)+\eta\pi_h^*(t)]k_h(s,t)=\frac{1-\alpha}{\alpha}c_m(s,t).$$

定義 2-1　s 期生まれ代表的家計の t 期における人的資産 (human wealth) を $h(s,t)$ とおくと，次の (2-20) のように生涯にわたって得る労働賃金の割引現在価値の合計として定義することができる。

(2-20)

$$h(s,t)=\int_t^\infty w(s,v)\exp\left(-\int_t^v r(\mu)d\mu\right)dv.$$

この定義 2-1 に関し，以下の定理 2-1 を得る。

定理 2-1　t 期における消費の割引現在価値の合計は，非人的資産及び人的資産の和に等しくなる。すなわち，以下 (2-21) が成立する。

$$\text{(2-21)}\quad \int_t^\infty c_m(s,v)\exp\left(-\int_t^v r(\mu)d\mu\right)dv=\alpha[a(s,t)+h(s,t)].$$

(証明)　(2-15′) を考慮しつつ，(2-13) を (2-20) に適用することにより，

$$h(s,t)=\int_t^\infty\left\{\frac{da(s,v)}{dv}-r(v)a(s,v)+\frac{1}{\alpha}c_m(s,v)\right\}\exp\left(-\int_t^v r(\mu)d\mu\right)dv$$

$$=\int_t^\infty\frac{da(s,v)}{dv}\exp\left(-\int_t^v r(\mu)d\mu\right)dv-\int_t^\infty[r(v)+p]a(s,v)\exp\left(-\int_t^v r(\mu)d\mu\right)dv+\frac{1}{\alpha}\int_t^\infty c_m(s,v)\exp\left(-\int_t^v r(\mu)d\mu\right)dv$$

と計算することができる。いま，$\int r(\mu)d\mu=R(\mu)$ とおくと，

$$\text{(2-22)}\quad \exp\left(-\int_t^v r(\mu)d\mu\right)=e^{R(t)-R(v)}$$

と表わすことができるから，

(2-20′)

$$h(s,t)=e^{R(t)}\left[\int_t^\infty \frac{da(s,v)}{dv}e^{-R(v)}dv - \int_t^\infty r(v)a(s,v)e^{-R(v)}dv+\frac{1}{a}\int_t^\infty c_m(s,v)e^{-R(v)}dv\right]$$

ここで，部分積分の公式により，

$$\int_t^\infty \frac{d[a(s,v)e^{-R(v)}]}{dv}dv = \int_t^\infty \frac{da(s,v)}{dv}e^{-R(v)}dv - \int_t^\infty r(v)a(s,v)e^{-R(v)}dv$$

が成り立つが，N.P.G. 条件（2-17）を考慮することにより，

$$\int_t^\infty \frac{d[a(s,v)e^{-R(v)}]}{dv}dv=[a(s,v)e^{-R(v)}]_t^\infty = -a(s,t)e^{-R(t)}$$

であるから，これを（2-20′）に適用するとただちに（2-21）が得られる。

（証明了）

補題 2-2　s 期生まれ代表的家計の t 期における製造業製品の消費水準 $c_m(s,v)$ に関して，次の（2-23）が成立する。

(2-23)　$$\lim_{v\to\infty} c_m(s,v)\exp\left(-\int_t^v r(\mu)d\mu\right)=0.$$

（証明） 最適化の必要条件（2-19）より，

$$c_m(s,v)=c_m(s,s)e^{-R(s)+\rho s}\cdot e^{R(v)-\rho v}\left(=c_m(s,s)\exp\left\{-\int_s^v[r(\mu)-\rho]d\mu\right\}\right)$$

が得られる。これにより，

$$\lim_{v\to\infty} c_m(s,v)\exp\left(-\int_t^v r(\mu)d\mu\right) = e^{R(t)}\lim_{v\to\infty} c_m(s,v)e^{-R(v)} = e^{R(t)}\cdot e^{-R(s)+\rho s}\cdot c_m(s,s)\lim_{v\to\infty} e^{-\rho v}=0$$

が成立する。

（証明了）

定理 2-3　s 期生まれ代表的家計の t 期における製造業製品の消費水準 $c_m(s,t)$，非人的資産 $a(s,t)$ 及び人的資産 $h(s,t)$ との間に，以下(2-24a）が成立する。

(2-24a)　$c_m(s,t)=\alpha\rho[a(s,t)+h(s,t)]$

（証明）　はじめに，(2-21）に（2-22）を適用することにより，

(2-21′)

$$e^{R(t)}\int_t^\infty c_m(s,v)e^{-R(v)}dv=\alpha[a(s,t)+h(s,t)]$$

が得られる。ところで，

$$\frac{d[c_m(s,v)e^{-R(v)}]}{dv}= e^{-R(v)}\frac{dc_m(s,v)}{dv}-r(v)c_m(s,v)e^{-R(v)}$$

が得られるが，右辺第 1 項にオイラー方程式(2-19）を適用することにより，

$$\frac{d[c_m(s,v)e^{-R(v)}]}{dv}=-\rho c_m(s,v)e^{-R(v)}$$

となる。この両辺を積分すると，

$$[c_m(s,v)e^{-R(v)}]_t^\infty=-\rho\int_t^\infty c_m(s,v)e^{-R(v)}dv$$

が得られるが，(2-23) [補題 2-2] を考慮すると，左辺は $-c_m(s,t)e^{-R(t)}$ に等しくなるから，

(2-25)

$$\int_t^\infty c_m(s,v)e^{-R(v)}dv=\frac{1}{\rho}c_m(s,t)e^{-R(t)}$$

が導出される。この（2-25）を（2-21′）に適用することにより，(2-24a)がただちにしたがう。

（証明了）

定理 2-3 系　s 期生まれ代表的家計の t 期における住宅サービスの消費水準 $k_h(s,t)$，非人的資

産 $a(s,t)$ 及び人的資産 $h(s,t)$ との間に，以下(2-24b) が成立する。

(2-24b)

$$k_h(s,t)=\frac{(1-\alpha)\rho[a(s,t)+h(s,t)]}{[r_h(t)+\eta\pi_h^*(t)]}\left(=\frac{(1-\alpha)c_m(s,t)}{\alpha[r_h(t)+\eta\pi_h^*(t)]}\right).$$

(証明)　定理 2-3 及び (2－15′) よりただちにしたがう。　**(証明了)**

(4)　集計

はじめに，既に定義した代表的家計の非人的資産 $a(s,t)$，人的資産 $h(s,t)$ 及び製造業製品の消費水準 $c_m(s,t)$ 及び住宅資本 $k_h(s,t)$ を，t 期において現存している世代全体で集計する。集計された変数とそれに相当する個別の変数との関係は以下のとおりである。

(2-26a)　$A(t)=\int_{-\infty}^{t}a(s,t)ne^{ns}ds,$

(2-26b)　$H(t)=\int_{-\infty}^{t}h(s,t)ne^{ns}ds,$

(2-26c)　$C_m(t)=\int_{-\infty}^{t}c_m(s,t)ne^{ns}ds,$

(2-26d)　$K_h(t)=\int_{-\infty}^{t}k_h(s,t)ne^{ns}ds.$

次に，(2-24a) ［定理 2-3］を各時点の総人口で集計し，(2-26a)～(2-26c) を適用すると，以下 (2-24a′) が得られる。

(2-24a′)　$C_m(t)=\alpha\rho[A(t)+H(t)].$

したがって，(2-26d) 及び (2-24b) ［定理 2-3 系］より，以下が得られる。

(2-24b′)

$$K_h(t)=\frac{(1-\alpha)\rho[A(t)+H(t)]}{[r_h(t)+\eta\pi_h^*(t)]}\left(=\frac{(1-\alpha)C_m(t)}{\alpha[r_h(t)+\eta\pi_h^*(t)]}\right).$$

次に，(2-20) ［定義 2-1］を (2-26b) に適用すると，

$$H(t)=\int_{-\infty}^{t}h(s,t)ne^{ns}ds$$
$$=\int_{-\infty}^{t}\int_{t}^{\infty}w(s,v)\exp\left(-\int_{t}^{v}r(\mu)d\mu\right)dvne^{ns}ds$$

が得られるが，積分の順序を変えることにより，

$$H(t)=\int_{t}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{t}w(s,v)ne^{ns}ds\right]\exp\left(-\int_{t}^{v}r(\mu)d\mu\right)dv$$

が得られる。上記の大括弧は，時点 v に生存している主体が稼ぐ労働所得の合計を表わすが，t 期に現存する全ての世代に労働所得を等しく分配することを仮定すると ($w(s,t)=w(t)$)，各期の総人口が 1 であることを考慮しつつ，以下 (2-27) が得られる。

(2-27)

$$H(t)=N(t)\int_{t}^{\infty}w(v)\exp\left(-\int_{t}^{v}r(\mu)d\mu\right)dv$$

(5)　動学体系の構築に向けて

はじめに，(2-22) を考慮しつつ，(2-27) を時間 t で微分すると，以下を得る。

(2-28)　$\dot{H}(t)=[r(t)+n]H(t)-N(t)w(t).$

次に，Leibnitz's Rule を考慮しつつ集計された非人的資産 $A(t)$ に関する (2-26a) を時間 t で微分することにより，以下 (2-29) が成立する[3)]。

(2-29)

$$\dot{A}(t)=a(t,t)ne^{nt}+\int_{-\infty}^{t}\frac{da(s,t)}{dt}ne^{ns}ds.$$

いま，(2-29) に，重複世代モデルの仮定すなわち新たに生まれた世代は資産を保有していないことにより，$a(t,t)=0$ であることを考慮しつつ (2-14) を適用すると，

(2-30)

$$\dot{A}(t)=r(t)A(t)+N(t)w(t)-\frac{1}{\alpha}C_m(t)$$

が導かれる。

さらに，(2-24a′) の両辺を時間 t で微分し，(2-28) 及び (2-30) を適用することにより，以下 (2-31) が得られる[4]。

(2-31)

$$\dot{C}_m(t)=[r(t)+n-\rho]C_m(t)-\alpha n\rho A(t).$$

4. 市場均衡

(1) 労働市場

いま，労働人口が総人口に等しい $N(t)$ であり，しかもこのモデルにおける産業は，製造業部門及び土地利用転換部門の 2 部門のみであるから，以下の労働市場における需給均衡式 (2-32) が成立する。

(2-32)　$N_m(t)+N_b(t)=N(t).$

この (2-32) の両辺を，$N(t)$ で除すると，以下 (2-32′) が得られる。

(2-32′)　$n_m(t)+n_b(t)=1.$

次に労働市場における裁定条件は，これら 2 部門における貨幣賃金率が等しくなること ($w(t)=w_m(t)=w_b(t)$) であるから，以下 (2-33) が成立する。

(2-33)

$$\begin{aligned} w(t)&=\omega AL_m(t)^z n_m(t)^{\omega-1}K_m(t)/N(t)\\ &=Bp_b(t)/N(t). \end{aligned}$$

(2) 土地市場

t 期における物理単位で測った住宅地の水準 $L_h(t)$ は，以下 (2-34) のようになる[5]。

(2-34)　$L_h(t)=\eta.$

いま，土地開発による土地の増加がないものとすれば，物理単位で測った土地の総量は時間を通じて一定の値をとることになるが，その値を L とおく。このとき，(2-34) により，また $L_v(t)$ を t 期における遊休地 (更地) として，以下の土地市場における需給均衡式 (2-35) が成立する。

(2-35)　$L_m(t)+\eta+L_v(t)=L.$

(3) 資産市場

はじめに，家計が保有する資産は実物資本，住宅資本，土地 (産業用地，住宅地及び遊休地) であるから，以下の資産市場の需給均衡式 (2-36) が成立する。

(2-36)　$A(t)=K_m(t)+K_h(t)+q_L(t)L.$

ただし，$q_L(t)$ は t 期におけるその用途に関わらずすべての土地に共通の取引価格であるが，この点，野口 [1985] 及び奈良 [1997]，同 [2000]，[2001a]，[2001b]，及び同 [2003] で設けた仮定と同様である。すなわち，資産としての土地は，すべて利用転換がなされた状態で売買されるので，取引が行われる時点ではすべて更地の状態であるからである。

いま，実物資本，住宅資本とも製造業部門において生産され，その価格は 1 に基準化されているから，完全予見の仮定のもと，資産を実物資本として運用した場合と住宅資本として運用した場合の裁定条件 (no-arbitrage condition) は，それぞれの収益率が等しくなること，すなわち，$r(t)=r_m(t)=r_h(t)$ であるから，(2-5) により，以下 (2-37) で表わされる。

(2-37)　$r(t)=xAL_m(t)^z n_m(t)^{\omega}.$

また，資産を実物資本あるいは住宅資本として運用した場合と遊休地として運用した場合の裁定条件は，以下 (2-38) で表わされる。

(2-38)　$r(t)=\dfrac{\dot{q}_L(t)}{q_L(t)}.$

また，資産を様々な用途の土地で運用した場合の裁定条件は，$\pi_h(t)$ を物理単位で測った住宅地 1 単位当たり地代であるものとして，以下のように表わすことができる[6]。

(2-39)　$\pi_m(t)=p_b(t),$

(2-40)　$\pi_h(t)=\sigma p_b(t)(=\pi_h^*(t)K_h(t)).$

すなわち，産業用地，宅地ともその地代が利用転換費用に等しくなる。

(4)　財・サービス市場

製造業部門の生産物に関する需給均衡式は以下（2-41）で表わされる。

(2-41)　$Y_m(t)=C_m(t)+\dot{K}_m(t)+\dot{K}_h(t).$

最後に，土地利用転換サービスの需給均衡式は，(2-34）を（2-9）に適用して，

(2-42)　$L_m(t)+\sigma\eta=Bn_b(t)$

で表わされる。

III.　動学体系

1.　動学体系の構築に向けて

ここでは，$K_m(t), K_h(t), L_m(t), L_h(t)$ あるいは $q_L(t)$ 等の状態変数を決定する微分方程式体系を導出する。はじめに，(2-6) 及び (2-39) より，以下（3-1）が得られる。

(3-1)　$p_b(t)=zAL_m(t)^{z-1}n_m(t)^{\omega}K_m(t).$

上記（3-1）及び（2-33）より，$p_b(t)$ を消去すると，以下を得る。

$$\frac{\omega A}{B}L_m(t)^z n_m(t)^{\omega-1}K_m(t)=zAL_m(t)^{z-1}n_m(t)^{\omega}K_m(t).$$

これより，製造業部門の労働力の割合 $n_m(t)$ は，産業用地の水準 $L_m(t)$ の簡単な1次関数として表わされる。すなわち，

(3-2)　$n_m(t)=\dfrac{\omega}{zB}L_m(t).$

この（3-2）及び（2-42）を，労働市場の需給均衡式（2-32）に適用すると，以下（3-3）のように，$L_m(t)$ が時点 t によらない一定値 L_m をとることがわかる。

(3-3)　$L_m(t)=\dfrac{z(B-\sigma\eta)}{\omega+z}\equiv L_m.$

この（3-3）を（3-2）に適用することにより，$n_m(t)$ についても時点 t によらない一定値 n_m をとることがわかる。すなわち，

(3-4)　$n_m(t)=\dfrac{\omega(B-\sigma\eta)}{B(\omega+z)}\equiv n_m.$

定理 3-1　$B>\sigma\eta$ を仮定した場合，製造業部門の労働力の割合 $n_m(t)$ 及び土地利用転換サービス部門の労働力の割合 $n_b(t)$ はともに，毎期0と1との間に決定される。

（証明）　$B>\sigma\eta$ であるから，(3-4) より，$n_m(t)>0$ は明らかである。また，(3-4) において分母が分子より大きいことから，$0<n_m(t)<1$ が明らかである。ゆえに，(2-32′) より，$0<n_b(t)<1$ もただちにしたがう。　**（証明了）**

次に，(3-3) 及び (3-4) を (2-37) に適用することにより，市場利子率 $r(t)$ についても時点 t によらない一定値 r をとることがわかる。すなわち，

(3-5)　$r(t)=xA\left(\dfrac{\omega}{zB}\right)^{\omega}\left[\dfrac{z(B-\sigma\eta)}{\omega+z}\right]^{1-x}\equiv r.$

また，(3-3) 及び (3-4) を (2-6) 及び (2-7) に適用することにより，産業用地の地代 $\pi_m(t)$ 及び労働賃金の総計 $w(t)N(t)$ が，いずれも実物資本の水準 $K_m(t)$ の増加関数として表わされることがわかる。すなわち，

(3-6)

$$\pi_m(t)=zA\left(\frac{\omega}{zB}\right)^{\omega}\left[\frac{z(B-\sigma\eta)}{\omega+z}\right]^{-x}K_m(t),$$

(3-7)　$w(t)N(t)=\omega A\left(\dfrac{\omega}{zB}\right)^{\omega-1}\left[\dfrac{z(B-\sigma\eta)}{\omega+z}\right]^{-x}K_m(t).$

さらに，生産関数 (2-2′) は，(3-3) 及び (3-4) を適用することによって，以下（3-8）のように書き換えることができる。

(3-8)

$$Y_m(t)=A\left(\frac{\omega}{zB}\right)^{\omega}\left[\frac{z(B-\sigma\eta)}{\omega+z}\right]^{1-x}K_m(t)\equiv\hat{A}K_m(t).$$

ただし，

(3-9)　$\hat{A}=A\left(\dfrac{\omega}{zB}\right)^{\omega}\left[\dfrac{z(B-\sigma\eta)}{\omega+z}\right]^{1-x}.$

また，$k(t)\equiv K_h(t)/K_m(t)$ とおくと，(2-39)，(2-40) 及び (3-6)，さらに，(3-3)，(3-9) により，以下 (3-10) が導出される。

(3-10)　$\pi_h^*(t)k(t)=\sigma z\hat{A}/L_m$

この (3-10) を (2-24b′) に適用し，$r(t)=r_m(t)=r_h(t)$ 及び (3-5) を考慮しつつ，$c(t)\equiv C_m(t)/K_m(t)$ とおくと，以下 (3-11) を得る。

(3-11)

$$k(t)=\frac{1}{r}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}c(t)-\frac{\sigma\eta z\hat{A}}{L_m}\right]$$
$$\equiv k[c(t)],k'[c(t)]=\frac{1-\alpha}{\alpha r}>0.$$

2.　定常的成長均衡とその動学的安定性

(1)　定常的成長均衡

本論における定常的成長均衡は，生産物 $Y_m(t)$, 消費水準 $C_m(t)$, 実物資本 $K_m(t)$ 及び住宅資本 $K_h(t)$，さらには土地価格 $q_L(t)$ が時間を通じて同一の率 g^* で成長するような均衡である。この点，次章 IV で詳しく論じるが，定常的成長均衡における成長率 g^* は，(2-38) 及び (3-5) より，以下 (3-12) で与えられる。

(3-12)

$$g^*=r=xA\left(\frac{\omega}{zB}\right)^{\omega}\left[\frac{z(B-\sigma\eta)}{1-x}\right]^{1-x}(=x\hat{A}).$$

(2)　動学的体系の構築

はじめに，(2-41) に (3-8) を適用し，両辺を $K_m(t)$ で除するとともに，(3-11) を適用して整理すると，以下 (3-13) が得られる。

(3-13)

$$(1+k[c(t)])\frac{\dot{K}_m(t)}{K_m(t)}=-\frac{1-\alpha}{\alpha r}\dot{c}(t)-c(t)+\hat{A}.$$

次に，$\nu(t)\equiv q_L(t)L/K_m(t)$ のもと，(2-36) を考慮しつつ，(2-31) の両辺を $K_m(t)$ で除すると，以下 (3-14) が得られる。

(3-14)

$$c(t)\frac{\dot{C}_m(t)}{C_m(t)}=(r+n-\rho)c(t)$$
$$-\alpha n\rho\{1+k[c(t)]+\nu(t)\}.$$

いま，(3-13) 及び (3-14) より，以下 (3-15) が得られる[7]。

(3-15)

$$\phi\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{1+k[c(t)]}{c(t)}[(r+n-\rho)c(t)$$
$$-\alpha n\rho\{1+k[c(t)]+\nu(t)\}]+c(t)-\hat{A}.$$

ただし，

(3-16)　$\phi=1+k[c(t)]-\dfrac{1-\alpha}{\alpha r}c(t)$

$$=1-\frac{\sigma\eta z\hat{A}}{rL_m}.$$

この (3-16) に関し，以下 (3-17) を仮定する。

(3-17)　$0<\phi<1.$

上記 (3-17) が成り立つための必要十分条件は，$xB>\sigma\eta$ である[8]。

次に，(2-31) の左辺に，

$$\dot{C}_m(t)=\dot{c}(t)K_m(t)+c(t)\dot{K}_m(t)$$

を適用し，両辺を $K_m(t)$ で除して整理することにより，以下 (3-18) が得られる。

(3-18)

$$\dot{c}(t)=-c(t)\frac{\dot{K}_m(t)}{K_m(t)}+(r+n-\rho)c(t)$$
$$-\alpha n\rho\{1+k[c(t)]+\nu(t)\}.$$

この (3-18) を (3-13) の右辺に適用して整理することにより，

(3-19)

$$\phi\frac{\dot{K}_m(t)}{K_m(t)}=\hat{A}-c(t)-\frac{1-\alpha}{\alpha r}[(r+n-\rho)c(t)$$
$$-\alpha n\rho\{1+k[c(t)]+\nu(t)\}]$$

が得られる。この (3-19) 及び (2-38) より，以下 (3-20) が得られる。

(3-20)

$$\phi\frac{\dot{\nu}(t)}{\nu(t)}=\frac{1-\alpha}{\alpha r}[(r+n-\rho)c(t)$$
$$-\alpha n\rho\{1+k[c(t)]+\nu(t)\}]$$
$$+c(t)-\hat{A}+\phi r.$$

以上 (3-15) 及び (3-20) が 2 状態変数 $c(t)$

及び $\nu(t)$ に関する完全な動学体系をなすが，これらを，(3-16) を考慮しつつ，以下 (3-15′) 及び (3-20′) のように定常的成長均衡の動学的安定性を検討しやすい形に置き換え，列挙する。

(3-15′)

$$\dot{c}(t)=\frac{c(t)}{\phi}\left\{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha r}+\frac{\phi}{c(t)}\right)[(r+n-\rho)c(t)-\alpha n\rho\{1+k[c(t)]+\nu(t)\}]+c(t)-\hat{A}\right\}$$
$$\equiv\Gamma(c(t),\nu(t)),$$

(3-20′)

$$\dot{\nu}(t)=\frac{\nu(t)}{\phi}\left\{\frac{1-\alpha}{\alpha r}[(r+n-\rho)c(t)-\alpha n\rho\{1+k[c(t)]+\nu(t)\}]+c(t)-\hat{A}+\phi r\right\}$$
$$\equiv\Lambda(c(t),\nu(t)).$$

(3)　定常的成長均衡の存在と一意性

定常的成長均衡においては，

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{\dot{\nu}(t)}{\nu(t)}=0$$

が成立するから，c 及び ν を，それぞれ定常状態における $c(t)$ 及び $\nu(t)$ であるものとして，(3-15′) 及び (3-20′) より，以下 (3-21) 及び (3-22) が成立する。

(3-21)

$$\left(\frac{1-\alpha}{\alpha r}+\frac{\phi}{c}\right)[(r+n-\rho)c-\alpha n\rho\{1+k(c)+\nu\}]=\hat{A}-c,$$

(3-22)

$$\frac{1-\alpha}{\alpha r}[(r+n-\rho)c-\alpha n\rho\{1+k(c)+\nu\}]=\hat{A}-c-\phi r.$$

定理 3-2　定常的成長均衡における c 及び k は，それぞれ，以下のように求められる。

(3-23)　$c=\alpha(\hat{A}-\phi r),$

(3-24)　$k=\dfrac{1-\alpha}{\alpha r}c+\phi-1.$

また，(3-23) において，(3-17) が満たされる場合，$c>0$ が成立する。さらに，(3-24) において $k>0$ であるための必要十分条件は，以下で与えられる。

(3-25)　$(1-\alpha)B>\sigma\eta.$

(証明)　(3-21) から (3-22) を辺々差し引いて整理すると，

(3-26)　$(r+n-\rho)c-\alpha n\rho\{1+k(c)+\nu\}=rc$

が得られる。この，(3-26) を (3-22) に適用すると，(3-23) が得られる。また，(3-5) 及び (3-9) より，(3-17) が満たされれば，

$$\alpha(\hat{A}-\phi r)=\alpha(1-x\phi)\hat{A}>0$$

であることが容易にわかる。また，(3-24) は，(3-16) より自明である。さらに，$k>0$ であるための必要十分条件としての (3-25) は，(3-23) を (3-24) に適用して整理すると，以下 (3-27) が導かれることから，ただちに得られる。

(3-27)　$k=\dfrac{z}{xL_m}[(1-\alpha)B-\sigma\eta].$

(証明了)

定理 3-3　定常的成長均衡における ν は，以下 (3-28) のように求められる。

(3-28)

$$\nu=\frac{c}{\alpha n\rho r}[(n-\rho)r-(1-\alpha)n\rho]-\phi.$$

また，(3-28) において $\nu>0$ であるための必要十分条件は，以下 (3-29) で表わされるように，$\hat{A}$ が十分大きな値をとることである。

(3-29)　$\hat{A}>\dfrac{n\rho[(1-\alpha)+\alpha x\phi]}{x(n-\rho)(1-x\phi)}.$

(証明)　定理の前半部分は，(3-24) を，(3-26) に適用することによって得られる。

また，定理の後半部分は，(3-28) に (3-23) 及び $r=x\hat{A}$ を適用することにより，

(3-30)

$$\nu=\frac{1}{n\rho x}[x(n-\rho)(1-x\phi)\hat{A}$$

$$-n\rho\{(1-\alpha)+\alpha x\phi\}]$$

が計算されることから，ただちに得られる。

（証明了）

(4)　定常的成長均衡の動学的安定性

ここでは，定常的成長均衡が局所的にいかなる動学的性質をもつか，検討する。はじめに，(3-15′) 及び (3-20′) を，均衡点（c,ν）の近傍において線形近似することにより，以下（3-31）のような定数係数連立線形微分方程式にまとめることができる。

$$\text{(3-31)}\quad \begin{pmatrix}\dot{c}(t)\\ \dot{\nu}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma_c & \Gamma_\nu\\ \Lambda_c & \Lambda_\nu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c(t)-c\\ \nu(t)-\nu\end{pmatrix}.$$

ただし，Γ_c 及び Γ_ν は，$\Gamma(c(t),\nu(t))$ をそれぞれ $c(t)$ 及び $\nu(t)$ で偏微分し，均衡点（c,ν）で評価したものであり，以下 (3-32a) 及び (3-32b) のように計算される[9]。

(3-32a)

$$\Gamma_c=\left(\frac{c}{\phi}\frac{1-\alpha}{\alpha r}+1\right)\left[(r+n-\rho)-\frac{(1-\alpha)n\rho}{r}\right]+\frac{c}{\phi}-r,$$

(3-32b)

$$\Gamma_\nu=-\alpha n\rho\left(\frac{c}{\phi}\frac{1-\alpha}{\alpha r}+1\right).$$

また，Λ_c 及び Λ_ν は，$\Lambda(c(t),\nu(t))$ をそれぞれ $c(t)$ 及び $\nu(t)$ で偏微分し，均衡点（c,ν）で評価したものであり，以下 (3-33a) 及び (3-33b) のように計算される。

(3-33a)

$$\Lambda_c=\frac{\nu}{\phi}\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha r}\left[(r+n-\rho)-\frac{(1-\alpha)n\rho}{r}\right]+\frac{\nu}{\phi},$$

(3-33b)

$$\Lambda_\nu=-\frac{\nu}{\phi}\cdot\frac{(1-\alpha)n\rho}{r}.$$

補題 3-4　定数係数連立線形微分方程式 (3-31) の定数係数行列を，

$$M=\begin{pmatrix}\Gamma_c & \Gamma_\nu\\ \Lambda_c & \Lambda_\nu\end{pmatrix}$$

とおくとともに，M の行列式を $\det M$，対角要素の和を $\mathrm{tr}M$ とおく。このとき，これら $\det M$ 及び $\mathrm{tr}M$ に関して $\phi>1$ 及び $n>\rho$ が成り立っているという仮定のもと，

(3-34)　$\det M>0,$

(3-35)　$\mathrm{tr}M>0$

が成立する。

（証明）　(3-32a) 及び (3-32b)，また (3-33a) 及び（3-33b）より，

(3-36)　$\det M=n\rho\nu/\phi$

と計算されることから，(3-34) がしたがう。次に，(3-32a) 及び（3-33b）より，

(3-37)　$\mathrm{tr}M=(n-\rho)+c/\alpha\phi$

と計算されることから，(3-35) がしたがう。

（証明了）

この，補題 3-4 より，定常的成長均衡点（c,ν）の動学的性質につき，以下の補題 3-5 によってまとめることができる。

補題 3-5　定常的成長均衡点（c,ν）は局所的に完全不安定である。

（証明）　2 次正方行列 M の 2 つの固有値を μ_1,μ_2 とおくと，μ_1,μ_2 は，以下の 2 次方程式

$$\mu^2-\mathrm{tr}M\mu+\det M=0$$

を解いて得られる。ところで，(3-36) 及び (3-37) より，$r=x\hat{A}$ を考慮しつつ，

$$(\mathrm{tr}M)^2-4\det M=\frac{1}{\phi^2}\left\{[(n-\rho)\phi-(1-\phi x)\hat{A}]^2+\frac{4\phi}{x}(1-\alpha)n\rho\right\}>0$$

と表わすことができるので，補題 3-4 とあわせて，μ_1,μ_2 はいずれも正の実根であることがわかる。したがって，$c(t)$ 及び $\nu(t)$ の局所的な解経路は，これら，μ_1,μ_2 を用いて

(3-38)　$\begin{cases} c(t)-c=C_1\nu_{11}e^{\mu_1 t}+C_2\nu_{21}e^{\mu_2 t} \\ \nu(t)-\nu=C_1\nu_{12}e^{\mu_1 t}+C_2\nu_{22}e^{\mu_2 t} \end{cases}$

と表わすことができる。ただし，ν_{11} 及び ν_{12} は，それぞれ固有値 μ_1 の固有ベクトルの要素であり，ν_{21} 及び ν_{22} は，それぞれ固有値 μ_2 の固有ベクトルの要素である。この (3-38) 及び μ_1,μ_2 がいずれも正であることにより，均衡点 (c,ν) は，完全不安定である。　**(証明了)**

補題 3-6　いま，t 期における 1 人あたり総資産を $a(t)$ とおく。すなわち，

(3-39)　$a(t)=A(t)/N(t).$

このとき，以下の条件式 (3-40) は，横断条件 (2-18) と同値である。

(3-40)　$\lim_{t\to\infty} q(t)e^{-\rho t}a(t)=0.$

(証明)　はじめに，$a(t)$ の定義及び $N(t)=e^{nt}$，さらには (2-26a) により，

(3-41)

$$q(t)e^{-\rho t}a(t)=q(t)e^{-\rho t}A(t)/N(t)$$
$$=e^{-nt}\int_{-\infty}^{t} q(t)e^{-\rho t}a(s,t)ne^{ns}ds$$

が得られる。いま，横断条件 (2-18) が成り立つ，すなわち，

$$\lim_{t\to\infty} q(t)e^{-\rho t}a(s,t)=0$$

である場合，(3-41) より，明らかに，(3-40) が成り立つ。

逆に，横断条件 (2-18) が成り立たない場合，たとえば，ある $\bar{a}>0$ が存在して，

$$\lim_{t\to\infty} q(t)e^{-\rho t}a(s,t)=\bar{a}$$

である場合，(3-41) より，人口に関する仮定を考慮しつつ，

$$\lim_{t\to\infty} q(t)e^{-\rho t}a(t)=\lim_{t\to\infty}e^{-nt}\int_{-\infty}^{t}\bar{a}ne^{ns}ds$$
$$=\lim_{t\to\infty}e^{-nt}\bar{a}\int_{-\infty}^{t}ne^{ns}ds=\lim_{t\to\infty}e^{-nt}\bar{a}e^{nt}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\bar{a}=\bar{a}>0$$

と計算され，(3-40) が満たされない。

以上より，(3-40) と横断条件 (2-18) とは同値である。　**(証明了)**

補題 3-7　初期時点から，経済が均衡点 (c,ν) にとどまる経路は，(2-18) を満たす。

(証明)　補題 3-6 より，横断条件 (2-18) が (3-40) と同値であることがわかっているので，経済が均衡点 (c,ν) にとどまる経路が (3-40) を満たすことを示す。

初期時点から経済が均衡点 (c,ν) にとどまるならば，すなわち定常状態にとどまるならば，資本の水準 $K_m(t),K_h(t)$ 及び地価 $q_L(t)$ が一定率 $g^*=r$ [(3-12)] で成長する。このとき，(2-36) より，$A(t)=A(0)e^{rt}$ であるから，

(3-42)　$a(t)=A(0)e^{(r-n)t}$

である。他方，(3-5) を (2-16) に適用することにより，

(3-43)　$q(t)=q(0)e^{(\rho-r)t}$

が得られる。これら (3-42) 及び (3-43) より，以下が得られる。

$$\lim_{t\to\infty} q(t)e^{-\rho t}a(t)=q(0)A(0)\lim_{t\to\infty} e^{-nt}=0$$

(証明了)

定理 3-8　経済が，初期時点から均衡点 (c,ν) にとどまる経路のみが最適な経路である。

(証明)　補題 3-5 により，定常的成長均衡点 (c,ν) は動学的に完全不安定な均衡点であり，非先決変数である地価 $q_L(t)$ の予測と，消費水準 $C_m(t)$ の適当な選択により，初期時点から時間を通じて (c,ν) にとどまることが可能である。そして，そのような経路は，補題 3-7 により，横断条件 (2-18) を満たす。

ところで，$c(t)$ あるいは $\nu(t)$ が負の無限大

に発散する経路は，経済学的に無意味であり，$\nu(t)$ が正の無限大に発散する経路は，横断条件を満たさない。また，$c(t)$ が正の無限大に発散する経路上では，(3-13) より，やがて製造業部門における生産水準を超えて製造業製品の消費が増大し，資本ストックの水準 $K_m(t)$ が減少に転じ，消費が不可能になる。さらに，$c(t)$ 及び $\nu(t)$ がゼロに収束する経路においては，定義によって消費水準 $C_m(t)$ もゼロに収束し，したがって効用が負の無限大となり，最適化に反する。

以上により，経済が均衡点（c,ν）にとどまる経路のみが最適な経路である。　　**（証明了）**

IV.　経済成長と経済厚生

1.　生涯効用と成長率

前章では，経済を表わす動学体系を，2 つの状態変数 $c(t)$ 及び $\nu(t)$ に関する連立微分方程式［(3-15′) 及び (3-20′)］にまとめ，均衡点（c,ν）の局所的な動学的性質を検討することを通じて，経済が，初期時点から均衡点（c,ν）にとどまる経路が最適な経路であることを結論として導き出した。そこでは，生産物 $Y_m(t)$，消費水準 $C_m(t)$，実物資本 $K_m(t)$ 及び住宅資本 $K_h(t)$，さらには土地価格 $q_L(t)$ が，初期時点から，時間を通じて（3-12）で表わされるような同一の率 g^* で成長するが，以下それを (4-1) として再掲する。

(4-1)

$$g^*=r=xA\left(\frac{\omega}{zB}\right)^{\omega}\left[\frac{z(B-\sigma\eta)}{1-x}\right]^{1-x}(=x\hat{A}).$$

ここに，生涯効用関数（2-11）において，$c_m(s,t)=c_m(t)$ 及び $k_h(s,t)=k_h(t)$ とおく。すなわち，t 期に現存する世代は，その生まれた時期に関わらず，製造業製品の消費及び住宅の水準とも等しいものと仮定する。ところで，

(4-2a)　$c_m(t)=C_m(t)/N(t)=C_m(0)e^{(r-n)t}$,

(4-2b)　$k_h(t)=K_h(t)/N(t)=K_h(0)e^{(r-n)t}$

であるが，このうち，$C_m(0)$ は，歴史的に与えられた $K_m(0)$ との関連で，$C_m(0)=cK_m(0)$ となるよう選ばれた値である。他方，$K_h(0)$ については，本来ストック変数の初期値であるものの，同様に歴史的に初期値が与えられた $K_m(0)$ との関連で，$K_h(0)=kK_m(0)$ となるよう選ばれた値である。ただし，この場合の k は，(3-24) より得られる。

これら（4-2a）及び（4-2b）を，生涯効用関数（2-11）に代入すると，

(4-3)

$$U(c_m(t),k_h(t))=\frac{1}{\rho}[\alpha\log C_m(0)+(1-\alpha)\log K_h(0)]+\frac{1}{2}e^{\rho t}\lim_{T\to\infty}(T+t)(T-t)(r-n)$$

が導かれるが，$T>t$ である限り，成長率 $g^*=r$ の単調増加関数になることがわかる。

2.　成長率を高める要因

直前の分析により，成長率 $g^*=r$ が高いほど，高い生涯効用が得られる，すなわち，経済厚生の観点からも，成長率が高いほうが望ましいことが判明したが，ここでは，成長率を高める要因を，一部のパラメータに様々な数値を代入しつつ検討することとする。

モデルの説明の箇所（第 II 章）で設定したパラメータのうち，n, ρ 及び $\omega, \alpha, \sigma, \eta$，また，$A, B, L$ の各値を以下のように固定する。

$n=0.008,\ \rho=0.005,\ \omega=0.500,\ \alpha=0.900,$
$\sigma=0.500,\ \eta=0.100$
$A=2.000,\ B=2.000,\ L=1.000$

上記のうち，$\omega=0.500$ としたのは，平成 16 暦年における国内総生産に占める雇用者報酬の割合が約 0.51 であることによる（『国民経済計算年報平成 18 年版』）。また，$\alpha=0.900$ としたのは，平成 16 暦年における家計消費支出総額に占める住居費及び家事・家具用品の合計の割合が，約 0.09 であることによる（『家計調査平成 16 年年報』）。さらに，$L=1.000$ とすることにより，土

地市場の需給均衡式（2-36）及び（3-3）に固定されたパラメータを適用して計算することによって得られる産業用地の水準 L_m 及び遊休地の水準 L_V は，それぞれ，全土地に占める産業用地及び遊休地の割合であると考えることができる。

ここでの分析は，$x+z=0.5$ を満たすように，製造業部門における実物資本のシェア x の値を変化させることにより，成長率 $g^*=r$，また遊休地の割合 L_V（あるいは産業用地の割合 L_m）がどのように変化するかを見極めることである。具体的には x の値を 0.200 から 0.350 まで 0.001 刻みで増やしていき，それらに対応する成長率 $g^*=r$ 及び遊休地の割合 L_V の値を，(4-1)，(3-3) 及び (2-35) より計算し，その結果を以下の図 IV-1 に表わした。図によれば，x の値が増大する，したがって都市における資本蓄積がもたらす集積効果 $\lambda=1-x$ の値が減少することにより，成長率 $g^*=r$ が単調に増大し，遊休地の割合 L_V は単調に減少する（したがって産業用地の割合 L_m は増加する）[10]。

V. 結　　語

前章までにおいて行った一般均衡モデルによる分析と，分析結果を改めて記すと以下のようになる。すなわち，資本蓄積が集積の経済として作用する枠組みにおいて，経済は初期時点から，実物資本，住宅資本，消費水準及び地価がいずれも市場利子率に等しい値で成長するような定常的成長均衡経路に乗る。そして，製造業部門における資本のシェアの拡大は，都市における成長率を高めるとともに，土地の有効利用度も高める。すなわち，遊休地の割合を低下させる。

上記のうち，成長率の上昇と土地有効利用度の向上とが両立するという分析結果は，奈良［2001a］，［2001b］，及び同［2003］で得られた結論とは正反対である。奈良［2001a］等においては，土地利用技術進歩＝効率単位で測った土地の水準の上昇を，都市の生産性向上に結びつき，成長のエンジンとなるようなモデルを構築して，土地課税の強化がもたらす効果に関する分析を行った。その際土地利用技術進歩を，人

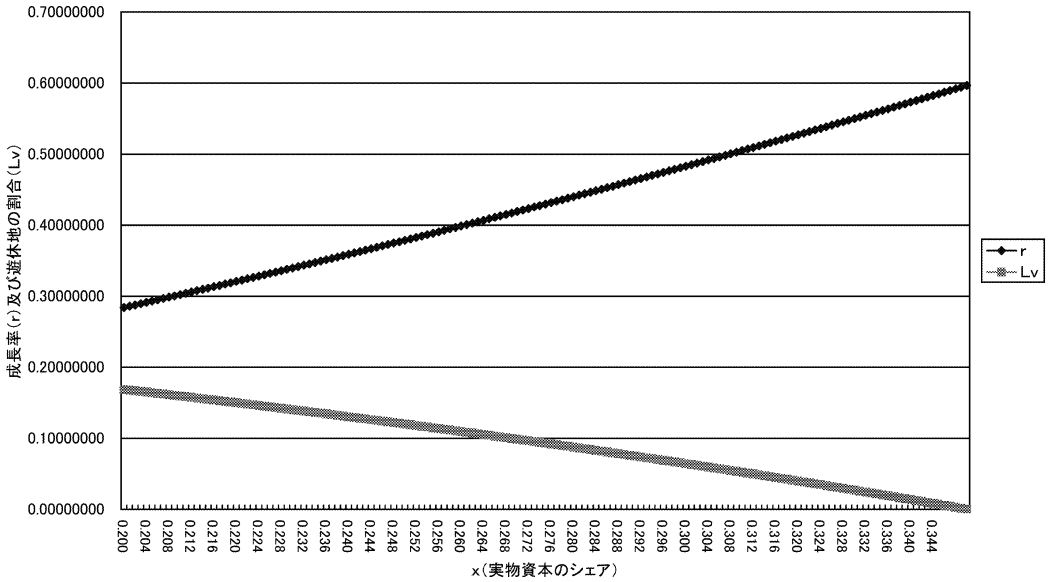

図 IV-1.　x（実物資本のシェア）の変化が成長率及び遊休地の割合に及ぼす影響

的労働力の一部を投入して行うＲ＆Ｄ活動の成果と位置づけたが，そのもとで，土地課税の強化は土地の有効利用度を高めるが，土地利用技術進歩率＝成長率を低下させるという結論が得られた。すなわち，奈良［2001a］等においては，成長率の上昇と土地有効利用度の向上とは両立しないことが結論づけられた。その最も大きな理由は，奈良［2001a］等において，生産性向上と成長をもたらすＲ＆Ｄ活動を行うには，そのための労働力が必要であり，生産性が向上した結果，土地有効利用度が高まり，その分土地利用転換に多くの労働力が必要となり，そこに（労働力という希少な資源に対する）競合が生じるからである。しかるに，本論において，奈良［2001a］等で想定した土地利用技術進歩に相当するものをもたらす主体は，資本蓄積がもたらす外部効果としての集積効果そのものであり，土地利用転換のための労働需要増大と競合しないからである。

本論では，集積効果をもたらす要因として民間資本の蓄積のみに着目したが，利便性が高い都市あるいは都市内の特定の地点に家計も企業も集中するのは，現実には，民間資本の蓄積のみならず公共資本の蓄積もプラスに作用しているはずである。

以上述べたような，公共資本の蓄積が都市の成長及び土地利用形態に及ぼす影響を考慮した分析を行うこと，また，都市間の人口移動及び資本移動を含む，より現実的な都市のあり方に拡張したモデルを構築して分析を行うこととあわせて今後の課題とする。

注

1)　ところで，経済全体の製造業部門の生産関数（2-2′）は，以下（a-1）のようにも書き換えることができる。

(a-1)

$$Y_m(t)=AK_m(t)^x[K_m(t)L_m(t)]^z[K_m(t)n_m(t)]^\omega.$$

この（a-1）より，知識資本の蓄積が外生的に土地増大的技術進歩及び労働増大的技術進歩を同時にもたらすことがわかる。また，その意味で，$L_m^*(t)\equiv K_m(t)L_m(t)$ は，効率単位で測った製造業部門の生産活動に投入される土地の水準であり，$n_m^*(t)\equiv K_m(t)n_m(t)$ は，効率単位で測った製造業部門の生産活動に投入される労働力の水準であると解釈できる。

2)　N.P.G. 条件（2-17）と横断条件（2-18）が同値であることは，以下のように証明することができる。いま，$\int r(\mu)d\mu=R(\mu)$ とおくと，

$$\exp\left(-\int_t^\nu r(\mu)d\mu\right)=e^{R(t)-R(\nu)}$$

であるから，$e^{R(t)}\neq 0$ を考慮すると，(2-17) は，以下（a-2）と同値である。

(a-2)　$\lim_{\nu\to\infty} a(s,\nu)e^{-R(\nu)}=0.$

ここに，(2-16) より，

$$q(t)=q(0)\exp\left\{\int_0^t[\rho-r(\nu)]d\nu\right\}$$
$$=q(0)e^{R(0)}\cdot e^{\rho t-R(t)}$$

が得られるから，以下が計算される。

$$q(\nu)e^{-\rho\nu}a(s,\nu)=q(0)e^{R(0)}\cdot e^{\rho\nu-R(\nu)}\cdot e^{-\rho\nu}a(s,\nu)$$
$$=q(0)e^{R(0)}\cdot e^{-R(\nu)}a(s,\nu)$$

しかるに，$q(0)\neq 0$ であるから，(a-2) より，以下がしたがう。

$$\lim_{\nu\to\infty} q(\nu)e^{-\rho\nu}a(s,\nu)=q(0)e^{R(0)}\lim_{\nu\to\infty}a(s,\nu)e^{-R(\nu)}$$
$$=0.$$

3)　Leibnitz's Rule とは，$g(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(s,t)ds$ とおくと，

(a-3)

$$g'(t)=f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t)$$
$$+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f(s,t)}{\partial t}ds.$$

が成立するという公式である（Kamien and Schwartz［1991］参照）。

この (a-3) において，$\alpha(t)=-\infty$, $\beta(t)=t$，ま

た，$f(s,t)=a(s,t)ne^{ns}$ とおくことにより，(2-29) がしたがう。

4) Weil［1989］を参照せよ。

5) (2-34) は，以下のように導出される。II3 (4) での議論にしたがい，t 期における物理単位で測った土地の水準を集計すると，(2-13) 及び人口に関する仮定により，以下のように計算される。

$$L_h(t)=\int_{-\infty}^{t} l_h(s,t)ne^{ns}ds=\frac{\eta}{N(t)}\int_{-\infty}^{t} ne^{ns}ds=\eta.$$

6) (2-40) は，以下のように導出される。すなわち，s 期生まれ代表的家計が t 期に支払う住宅地代は，(2-12) 及び (2-13) より，以下 (a-4) で与えられる。

(a-4)　$\pi_h^*(t)l_h^*(s,t)=\pi_h^*(t)k_h(s,t)\eta.$

この (a-4) を集計すると，(2-34) を考慮しつつ，以下が得られる。

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{t}\pi_h^*(t)k_h(s,t)\eta ne^{ns}ds\\&\quad=\eta\pi_h^*(t)\int_{-\infty}^{t}k_h(s,t)ne^{ns}ds\\&\quad=\pi_h^*(t)K_h(t)\eta=\pi_h^*(t)K_h(t)L_h(t).\end{aligned}$$

これより，t 期における住宅地の物理単位で測った地代は，以下のように表わされる。

$$\pi_h(t)=\pi_h^*(t)K_h(t).$$

7) $(1+k[c(t)])\times$(3-14) から $c(t)\times$(3-13) を減じることにより，

(a-5)

$$\begin{aligned}&\{1+k[c(t)]\}\dot{c}(t)=c(t)\cdot\frac{1-\alpha}{\alpha r}\dot{c}(t)\\&+\{1+k[c(t)]\}[(r+n-\rho)c(t)\\&-\alpha n\rho\{1+k[c(t)]+\nu(t)\}]-c(t)[\hat{A}-c(t)]\end{aligned}$$

が得られる。他方，(3-11) より，

$$\begin{aligned}&1+k[c(t)]=\frac{1}{r}\left[\frac{1-\alpha}{\alpha}c(t)-\frac{\sigma\eta z\hat{A}}{L_m}\right]+1\\&=\frac{1-\alpha}{\alpha r}c(t)+\left(1-\frac{\sigma\eta z\hat{A}}{rL_m}\right)\end{aligned}$$

であるから，

$$\phi=1-\frac{\sigma\eta z\hat{A}}{rL_m}$$

とおいて，(a-5) に適用し，(a-5) の両辺を $c(t)$ で除すれば (3-15) を得る。

8) (3-5) 及び (3-9) より，$r=x\hat{A}$ となることを考慮し，

$$\begin{aligned}\phi&=1-\frac{\sigma\eta z\hat{A}}{rL_m}=\frac{1}{rL_m}(rL_m-\sigma\eta z\hat{A})\\&=\frac{1}{x\hat{A}L_m}(x\hat{A}L_m-\sigma\eta z\hat{A})=\frac{1}{xL_m}(xL_m-\sigma\eta z)\end{aligned}$$

と計算することができる。これに，(3-3) を適用することにより，以下が導かれる。

$$\begin{aligned}\phi&=\frac{1}{xL_m}\left(x\cdot\frac{z(B-\sigma\eta)}{1-x}-\sigma\eta z\right)\\&=\frac{z}{x(1-x)L_m}(x(B-\sigma\eta)-(1-x)\sigma\eta)\\&=\frac{z}{x(1-x)L_m}(xB-\sigma\eta).\end{aligned}$$

9) (3-32a) は次のように導出される。$\Gamma(c(t),\nu(t))$ を $c(t)$ で偏微分し，均衡点 (c,ν) で評価すると，(3-21) 及び (3-22) を考慮しつつ以下のように計算される。

$$\begin{aligned}\Gamma_c=&\frac{c}{\phi}\Big[-\frac{\phi}{c^2}\{(r+n-\rho)c\\&-\alpha n\rho[1+k(c)+\nu]\}\\&+\frac{1-\alpha}{\alpha r}\left\{(r+n-\rho)-\frac{(1-\alpha)n\rho}{r}\right\}\Big]\\&+\frac{c}{\phi}\left[\frac{\phi}{c}\left\{(r+n-\rho)-\frac{(1-\alpha)n\rho}{r}\right\}+1\right].\end{aligned}$$

上記右辺第 1 項に，(3-26) を適用して整理することにより，(3-32a) を得る。

10) 本論で得た分析結果は，本論における遊休地同様，それ自体収益を生まない非生産的な資産としての紙幣（paper asset）の増加率が高いほど，高い成長率に結びつくとする Futagami and Shibata［2000］における結論とは対照的である。本論においては，遊休地の割合の低下は必然的に産業用地の割合の増大に結びつくが，このことは，市場利子率＝実物資本の限界生産性を高めることを通じて，定常的成長均衡における成長率を高めることとなるからである。

Futagami and Shibata は，本論と同様の Weil 型重複世代モデルを用い，資産としての紙幣の存在が，経済成長率及び経済厚生に及ぼす影響を分析した。そこでの紙幣はあくま

で資産を利殖するための手段であり，それ自体効用を生み出さないものとしたが，この点，Sidrauski［1967］とは大きく異なる。これに対し，Tirole［1985］及びそれを成長が持続する枠組みに拡張した Grossman and Yanagawa［1993］においては，いずれも，遺産動機のないオーソドックスな重複世代モデルを用いて，Futagami and Shibata 同様，効用関数の中に紙幣が入らない枠組みの中で，紙幣の存在が経済厚生に及ぼす影響に関する分析がなされた。Tirole は，非正産的な資産である紙幣の存在が，むしろ，経済厚生を改善すると結論づけたのに対し，Grossman and Yanagawa は，紙幣とそれによるバブルの存在が，その分成長率を下げ，経済厚生を悪化させるとした。

参考文献

［1］ Arrow, K.J.［1962］, “The Economic Implications of Learning by Doing,” *Review of Economic Studies* 29, 155-173.

［2］ Fujita, M.［1988］, “A Monopolistic Competition Model of Spatial Agglomeration—Differentiated Product Approach—,” *Regional Science and Urban Economics* 18, 87-124.

［3］ Futagami, K. and Shibata, A.［2000］, “Growth Effects of Bubbles in an Endogenous Growth Model,” *The Japanese Economic Review* 51, 221-235.

［4］ Grossman, G. and Yanagawa, N.［1993］, “Asset Bubbles and Endogenous Growth,” *Journal of Monetary Economics* 31, 3-19.

［5］ Kamien, M.I. and Schwartz, N.L.［1991］, ‘*Dynamic Optimization*,’ North-Holland.

［6］ Kanemoto, Y. ‘*Theories of Urban Externalities*,’ North-Holland.

［7］ 国土交通省［2006a］,『平成 18 年地価公示』，国立印刷局.

［8］ 国土交通省［2006b］,『平成 18 年版土地白書』，国立印刷局.

［9］ Lucas, R.E.Jr.［1988］, “On The Mechanics of Economic Development,” *Journal of Monetary Economics* 22, 3-42.

［10］ Mino, K. and Shibata, A.［1995］, “Monetary Policy, Overlapping Generations and Patterns of Growth,” *Economica* 62, 179-194.

［11］ Miyao, T.［1977］, “The Golden Rule of Urban Transportation Investment,” *Journal of Urban Economics* 4, 448-458.

［12］ 内閣府経済社会総合研究所編［2006］,『国民経済計算年報平成 18 年版』，メディアランド.

［13］ 奈良　卓［1997］,「土地課税の経済分析」，研究年報『経済学』（東北大学経済学会）59, 75-90.

［14］ 奈良　卓［2000］,「土地課税の経済分析—内生的土地利用技術進歩モデルの構築に向けて—」,『八戸大学紀要』20, 63-81.

［15］ 奈良　卓［2001a］,「土地課税の経済分析—内生的土地利用技術進歩—」,『八戸大学紀要』21, 22, 69-87.

［16］ 奈良　卓［2001b］,「土地課税の経済分析—$\theta>0$ の場合における一考察—」,『八戸大学紀要』23, 53-72.

［17］ 奈良　卓［2003］,「土地課税の経済分析—4 部門土地利用技術進歩モデルを用いた分析—」，研究年報『経済学』（東北大学経済学会）64, 443-456.

［18］ 野口悠紀雄［1985］,「土地課税が都市的土地利用に与える影響」,『経済研究』36, 15-22.

［19］ Rabenau, B.［1979］, “Urban Growth with Agglomeration Economies and Diseconomies,” *Geographia Polonica* 42, 77-90.

［20］ Romer, P.M.［1986］, “Increasing Returns and Long-Run Growth,” *Journal of Political Economy* 94, 1002-1037.

［21］ Sidrauski, M.［1967］, “Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy,” *American Economic Review* 57, 534-544.

［22］ 総務省統計局編［2005］,『家計調査平成 16

年年報』，日本統計協会．
[23] Tirole, J. [1985], "Asset Bubbles and Overlapping Generations," *Econometrica* 53, 1499–1528.
[24] Weil, P. [1989], "Overlapping Families of Infitely－Lived Agents," *Journal of Public Economics* 38, 183–198.